

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Proyecto Fin de Carrera

Formulación Espacial de la Función de Green para el Análisis de Circuitos de Radiofrecuencia en Cavidades de Geometría Arbitraria



AUTOR: Juan Sebastián Gómez Díaz
DIRECTOR: Alejandro Álvarez Melcón
CODIRECTOR: Fernando D. Quesada Pereira

Cartagena, Septiembre 2006



Autor	Juan Sebastián Gómez Díaz
E-mail del Autor	madhap@ono.com
Director(es)	Alejandro Álvarez Melcón
E-mail del Director	Alejandro.alvarez@upct.es
Codirector(es)	Fernando Daniel Quesada Pereira
Título del PFC	Formulación Espacial de la Función de Green para el Análisis de Circuitos de Radiofrecuencia en Cavidades de Geometría Arbitraria
Descriptores	Función de Green, Ecuación integral, Guías de onda
<p>Resumen</p> <p>En este proyecto fin de carrera se pretende estudiar la técnica de las imágenes espaciales para el cálculo de funciones de Green en cavidades cilíndricas, optimizarla y extender el método a cavidades de geometría arbitraria. El cálculo de las funciones de Green y sus potenciales asociados son fundamentales para el análisis electromagnético de múltiples estructuras y circuitos mediante la técnica de la ecuación integral.</p> <p>Se pueden dividir los contenidos del proyecto en dos grandes bloques:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) <u>Optimización de la función de Green en cavidades cilíndricas</u>: Con el objetivo de mejorar la precisión de la técnica aplicada a guías circulares. Se presenta un método de cómputo de la precisión de los potenciales obtenidos así como múltiples técnicas de mejora. 2) <u>Extensión de la técnica a cavidades de geometría arbitraria</u>: Se desarrolla la formulación para el cálculo de los potenciales en el interior de cualquier estructura multicapa, así como su implementación en el lenguaje Fortran 90. Se presentan resultados para múltiples geometrías de guías en 3D, validando los resultados de forma analítica en caso posible o mediante el software comercial HFSS©. 	
Titulación	Ingeniero de Telecomunicación
Intensificación	Sistemas y Redes de Telecomunicación
Departamento	Tecnología de la Información y la Comunicación
Fecha de Presentación	Septiembre de 2006

A Alberto

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi director de proyecto Alejandro Álvarez Melcón la atención recibida durante la duración del trabajo, el apoyo técnico recibido y el gran optimismo y ánimo que mostraba cuando nada salía. Muchas gracias.

También quiero agradecer a Fernando D. Quesada la cesión de software diseñado por él así como la resolución de múltiples dudas que han ido surgiendo en todo este tiempo.

Quiero agradecer a mi familia todo el apoyo brindado y el haber estado ahí en los momentos más difíciles, especialmente a mis padres y hermana. Sin ellos ni este trabajo ni nada en mi vida habría sido posible.

Finalmente, un recuerdo para todos mis amigos, pidiendo perdón por el tiempo que he faltado y no he podido estar con vosotros. Aun así habéis estado siempre ahí, muchas gracias. En especial agradecerte Mónica tu cariño y apoyo (y dotes matemáticas :P) durante todo este tiempo.

Muchas gracias a todos.

Índice de Contenidos

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Descripción del proyecto.....	1
1.1.1 Planteamiento inicial del proyecto.....	1
1.1.2 Objetivos.....	2
1.1.3 Estructura del proyecto	2
1.1.4 Aportaciones novedosas	3
1.1.5 Software desarrollado	4
1.2 Conceptos de electromagnetismo	5
1.2.1 Ecuaciones de Maxwell	5
1.2.2 Métodos numéricos	7
1.2.3 Ecuación Integral	8
2. FORMULACIÓN ESPACIAL EN CAVIDADES CIRCULARES	11
2.1 Formulación espacial con fuentes eléctricas.....	12
2.1.1 Desarrollo de la formulación	12
2.1.2 Resultados.....	19
1) Situación de la fuente: $(0\lambda, 0\lambda)$	20
2) Situación de la fuente: $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$	25
3) Situación de la fuente: $(0.625\lambda, 0\lambda)$	28
4) Situación de la fuente: $(0.7, 0.7)$	31
5) Conclusiones	35
2.2 Formulación espacial con fuentes magnéticas.....	36
2.2.1 Desarrollo de la formulación	36
2.2.2 Resultados.....	41
2.3 Software desarrollado	43
2.3.1 Introducción de los datos	43
2.3.2 Programa en Fortran 90	44
2.3.2.1 Código empleado	44
2.3.2.2. Compilación y ejecución.....	45
2.3.3. Programa en Matlab©.....	46
2.3.3.1 Código empleado.....	46
2.3.3.2 Ejecución	46
3. OPTIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN ESPACIAL DE GREEN.....	47
3.1 Introducción.....	47
3.2 Optimización del potencial escalar	49
3.2.1 Introducción.....	49
3.2.2. Método de optimización “Integración por pulsos”	54
3.2.2.1 Aproximación del Trapecio	55
3.2.2.2 Aproximaciones numéricas cerradas.....	58
3.2.2.3 Aproximaciones numéricas semi-abiertas.....	59
3.2.2.4 Aproximación del Trapecio tomando una gran cantidad de puntos intermedios	61
3.2.2.5 Resultados de las distintas aproximaciones con integración de pulsos	61
3.2.3. Método de variación dinámica de cargas en picos de potencial	63
3.2.3.1 Desarrollo teórico.....	63

3.2.3.2 Resultados obtenidos	65
3.2.4. Método de la variación dinámica del radio imagen	67
3.2.4.1 Desarrollo teórico.....	67
3.2.4.1 Resultados obtenidos	69
3.2.5 Optimización por descenso de gradiente de las cargas	77
3.2.5.1 Desarrollo teórico.....	77
3.2.5.2 Resultados obtenidos	83
3.2.6 Optimización por descenso de gradiente de las posiciones	88
3.2.6.1 Desarrollo teórico.....	88
3.2.6.2 Resultados obtenidos	95
3.2.7 Empleo de métodos de forma conjunta y comparación	99
3.2.8 Conclusiones.....	104
3.3 Optimización del potencial vector	106
3.3.1 Introducción.....	106
3.3.2 Método de la variación del radio	112
3.3.2.1 Desarrollo teórico.....	112
3.3.2.2 Resultados obtenidos	113
3.3.3 Conclusiones.....	118
3.4 Software desarrollado	119
 4. EXTENSIÓN DE LA FORMULACIÓN ESPACIAL DE GREEN A ESTRUCTURAS ARBITRARIAS.....	 121
4.1 Introducción.....	121
4.2 Formulación espacial de Green en tramos rectos.....	122
4.2.1 Desarrollo de la Formulación	122
4.2.2 Validación de los resultados	130
4.3 Estructuras arbitrarias	133
4.3.1 Introducción.....	133
4.3.2 Creación de la estructura a analizar	134
4.3.3 Elección de puntos tangentes en el contorno de la estructura.....	138
4.3.4 Ubicación de las imágenes.....	142
4.3.5 Reconocimiento de estructuras arbitrarias	145
4.3.6 Ejemplos de potenciales en estructuras arbitrarias	147
4.4 Optimización de los potenciales en estructuras arbitrarias.....	154
4.4.1 Introducción.....	154
4.4.2 Coste del potencial escalar.....	154
4.4.3 Coste del potencial vector.....	157
4.4.4 Optimización de potenciales	160
4.4.4.1 Método de la variación del radio.....	160
4.4.4.2 Método de la variación de la distancia especular.	162
4.4.4.3 Optimización por descenso de gradiente de las cargas	164
4.4.4.4 Optimización por descenso de gradiente de las posiciones.....	166
4.4.4.5 Comparación de métodos.....	169
4.5 Validación de resultados en una guía cuadrada	170
4.6 Software desarrollado	172
 5. ANÁLISIS DE CAVIDADES TRIDIMENSIONALES	 175
5.1 Introducción.....	175

5.2 Análisis de cavidades eléctricamente cortas.....	176
5.2.1 Transformada de Sommerfeld	176
5.2.2 Descripción de la cavidad.....	177
5.2.3 Análisis de cavidades circulares	179
5.2.3 Análisis de cavidades arbitrarias.....	185
5.3 Análisis de cavidades eléctricamente largas: Multianillo.....	194
5.4 Problemas de convergencia.....	200
5.4.1 Guía dual formada por guía cuadrada con corte en una esquina.....	200
5.4.2 Estudio Guía Rombo en función de sus ángulos internos.....	208
5.4.3 Conclusiones.....	213
5.5 Cálculo de frecuencias de resonancia	213
5.6 Software desarrollado	219
5.6.1 Cálculo de los potenciales.....	219
5.6.2 Barrido en frecuencia.....	221
6. EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE GUÍAS-ONDA TIPO	223
6.1 Introducción.....	223
6.2 Guía rectangular.....	224
6.3 Guía triangular	230
6.4 Guía rombo con ángulos internos a 90°	235
6.5 Guía trapecio.....	241
6.6 Guía dual (cuadrada con un corte)	246
6.7 Guía flange	253
6.8 Limitaciones del método: Guía estrella y ridge.....	260
6.8.1 Guía estrella	261
6.8.2 Guía ridge	265
6.9 Análisis multicapa: Guía cuadrada con dos dieléctricos	270
6.10 Software desarrollado	274
7. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS	275
7.1 Conclusiones.....	275
7.2 Líneas futuras	276
ANEXO I.....	279
ANEXO II.....	283
BIBLIOGRAFÍA	287

Índice de Figuras

Figura 2.1 Dipolo unitario situado en el interior de la cavidad cilíndrica.....	12
Figura 2.2 Situación una carga imagen respecto al cilindro.....	12
Figura 2.3 Distancias empleadas para el cálculo de la posición de la carga imagen.....	13
Figura 2.4 Situación de dos cargas imágenes alrededor del cilindro.....	14
Figura 2.5 Dipolo fuente en el eje 'x' y sus dos dipolos imagen asociados a un punto tangente	15
Figura 2.6 Descomposición de un dipolo I_1 en los dos ejes, con unos pesos determinados.....	17
Figura 2.7 Representación cilindro con 20 cargas/dipolos imágenes	20
Figura 2.8 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 20 cargas imágenes.....	20
Figura 2.9 Potencial escalar en el contorno del cilindro. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 20 cargas imágenes	21
Figura 2.10 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imagen.....	21
Figura 2.11 Representación potencial vector G_A^{xy} y G_A^{yx} . Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.....	22
Figura 2.12 Representación potencial vector G_A^{yy} . Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.....	22
Figura 2.13 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0,0)$ y 5 cargas imágenes	23
Figura 2.14 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y 30 cargas imágenes.....	23
Figura 2.15 Comparación potencial escalar y vectorial G_A^{xy} . Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$ y con 5 y 30 cargas/dipolos imagen	24
Figura 2.16 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en la posición $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$	25
Figura 2.17 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 cargas imágenes.....	25
Figura 2.18 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 30 cargas imágenes.....	26
Figura 2.19 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Carga en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 cargas imagen.....	26
Figura 2.20 Representación potencial vector G_A^{xy} . Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	27
Figura 2.21 Representación potencial vector G_A^{yx} . Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	27
Figura 2.22 Representación potencial vector G_A^{yy} . Carga en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.....	28
Figura 2.23 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en $(0.625, 0)$	28
Figura 2.24 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 cargas imágenes.....	29
Figura 2.25 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 cargas imágenes.....	29
Figura 2.26 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Carga en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 cargas imagen.....	29
Figura 2.27 Representación potencial vector G_A^{xy} . Carga en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	30
Figura 2.28 Representación potencial vector G_A^{yx} . Carga en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	30
Figura 2.29 Representación potencial vector G_A^{yy} . Carga en $(0.625\lambda, 0\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	30
Figura 2.30 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en $(0.7, 0.7)$	31
Figura 2.31 "Zoom" de la situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	31
Figura 2.32 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 cargas imágenes.....	32
Figura 2.33 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.7, 0.7)$ y 20 cargas/dipolos imágenes	32
Figura 2.34 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 cargas imagen.....	33
Figura 2.35 Representación potencial vector G_A^{xy} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	33
Figura 2.36 Representación potencial vector G_A^{yx} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.	34

Figura 2.37 Representación potencial vector G_A^{yy} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.....	34
Figura 2.38 Situación una carga imagen respecto al cilindro.....	36
Figura 2.39 Dipolo fuente en el eje 'x' y sus dos dipolos imagen asociados a un punto tangente.....	38
Figura 2.40 Potencial escalar magnético normalizado en el eje $x=0$	41
Figura 2.41 Potencial vector eléctrico G_F^{xx} normalizado en el eje $x=0$	42
Figura 2.42 Potencial vector eléctrico G_F^{xx} normalizado en el eje $y=0$	42
Figura 2.43 Potencial vector eléctrico G_F^{yx} normalizado evaluado con 20 imágenes.....	42
Figura 3.1 Representación 15 cargas imágenes alrededor del cilindro, fuente en origen coordenadas.....	50
Figura 3.2 Representación del potencial escalar en contorno del cilindro en función del ángulo. Empleo de 15 imágenes, fuente en origen de coordenadas.....	50
Figura 3.3 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 15 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	51
Figura 3.4 Distancia entre puntos tangentes en la aproximación del trapecio.....	55
Figura 3.5 Aproximaciones integrales cerradas: solape de información.....	58
Figura 3.6 Características de la aproximación de Simpson's.....	58
Figura 3.7 Aproximaciones integrales semi-abiertas: no se solapa la información.....	59
Figura 3.8 Situación de los puntos intermedios en una aproximación semi-abierta.....	60
Figura 3.9 Detalle de los puntos intermedios tomados en un arco del cilindro al realizar una aproximación por Trapecio general.....	61
Figura 3.10 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 14 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	63
Figura 3.11 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro tras ubicar un punto tangente en un pico de potencial, empleo de 15 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	64
Figura 3.12 Detalle de la ubicación de un nuevo punto de condición de potencial nulo donde se encontraba anteriormente un pico de potencial.....	64
Figura 3.13 Detalle de la distribución del potencial, 25 cargas imágenes habiendo evolucionado su colocación en picos de potencial desde 19 cargas. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	66
Figura 3.14 Distribución del potencial a lo largo del contorno del cilindro con 15 imágenes. a) Situando las cargas en picos de potenciales y evolucionando desde una situación inicial de 10 imágenes. b) Empleando Point-Matching.....	66
Figura 3.15 Situación 20 cargas imagen alrededor cilindro, fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	67
Figura 3.16 Situación 20 cargas imagen, fuente ubicada en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	68
Figura 3.17 Situación 20 cargas imagen ubicación circular. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	69
Figura 3.18 Coste en función del radio (0-8000). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	69
Figura 3.19 Coste en función del radio (0-11). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	70
Figura 3.20 Coste en función del radio (2-7). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	70
Figura 3.21 Coste en función del radio, paso grueso y fino. 20 imágenes y fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	71
Figura 3.22 Variación del coste con el radio variable (0-80). 10 cargas imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	72
Figura 3.23 Comparativa costes método original y variación de radio.....	72
Figura 3.24 Potencial escalar en el contorno, métodos original y variación de radio. Fuente situada en el origen y 20 imágenes.....	73
Figura 3.25 Variación del coste con el radio, 5 imágenes y fuente en el origen.....	74
Figura 3.26 Coste en función del radio. 10 cargas imágenes y fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	75
Figura 3.27 Situación con 10 imágenes y fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	83
Figura 3.28 Representación Potencial escalar en función del ángulo. 10 imágenes y fuente en origen.....	83
Figura 3.29 Evolución del Coste en función del número de iteración, paso dinámico. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en la posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	84
Figura 3.30 Evolución del Coste en función del número de iteración, paso fijo. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en la posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	84
Figura 3.31 Representación Potencial escalar en función del ángulo tras optimizar el valor complejo de las cargas. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en el origen.....	85
Figura 3.32 Situación con 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	95
Figura 3.33 Potencial escalar en función del ángulo. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	95
Figura 3.34 Representación de la evolución del coste y de las posiciones de las cargas imagen al realizar una optimización de las posiciones. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	96
Figura 3.35 Potencial escalar en función del ángulo tras optimizar las posiciones de las cargas imagen. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$	97
Figura 3.36 Representación 20 cargas imágenes alrededor del cilindro, fuente en origen coordenadas.....	107

Figura 3.37 Valor de las condiciones del potencial vector en el contorno del cilindro, 20 imágenes, fuente situada en el origen.	108
Figura 3.38 Distribución del error del potencial vector en el contorno del cilindro, 20 imágenes, fuente situada en el origen.	108
Figura 3.39 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 20 imágenes y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	109
Figura 3.40 Detalle del Coste del potencial vector para cada condición. 20 imágenes y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	109
Figura 3.41 Diferencias en la ubicación de dipolos imágenes. a) Método general. b) Variación dinámica del radio. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	112
Figura 3.42 Variación del coste del potencial vector en función del radio. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	113
Figura 3.43 Variación del coste del potencial vector en función del radio en torno al mínimo. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	114
Figura 3.44 Comparación de la distribución de la condición del potencial vector en el contorno de un cilindro. a) Optimizando el radio. b) Método general. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$	114
Figura 3.45 Ejemplo de convergencia del coste del potencial vector en el infinito. 15 imágenes, fuente en el origen de coordenadas.....	115
Figura 3.46 Variación de la condición del potencial vector en el contorno del cilindro en función del radio, existiendo 2 mínimos. 15 cargas imágenes y fuente en $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$	116
Figura 4.1 Dipolo unitario situado en el interior de una cavidad cuadrada	122
Figura 4.2 Ubicación de una condición de contorno G_v en la pared de una guía cuadrada	123
Figura 4.3 Tramo oblicuo y sus ejes de coordenadas	124
Figura 4.4 Ubicación de una condición de contorno del potencial vector	125
Figura 4.5 Estructura cilíndrica, de radio $a = \lambda$, analizada con 20 imágenes y fuente situada en el centro. Perspectivas de formulación cartesiana y formulación cilíndrica.	130
Figura 4.6 Comparación del potencial escalar en un cilindro bajo las formulaciones cartesiana y cilíndrica. 20 imágenes, fuente en el origen.....	131
Figura 4.7 Comparación del potencial vector en un cilindro bajo las formulaciones cartesiana y cilíndrica. 20 imágenes, fuente en el origen.....	132
Figura 4.8 Ejemplos varios de estructuras arbitrarias creadas.....	135
Figura 4.9 Fichero descriptor de una guía ridge con sus lados redondeados.....	136
Figura 4.10 Ejemplo de guía ridge con lados redondeados.....	136
Figura 4.11 Distribución uniforme de 15 puntos tangentes en una guía ridge “redondeada”	139
Figura 4.12 Distribución uniforme de 15 puntos tangentes en una guía triangular.....	139
Figura 4.13 Ubicación de 3, 4 y 7 puntos tangentes en una guía triangular, empleando una distribución de los mismos por vértices y mitades de segmentos.	140
Figura 4.14 Ubicación de 32 puntos tangentes en una guía ridge redondeada, empleando una distribución de los mismos por vértices y mitades de segmentos.	140
Figura 4.15 Ubicación de puntos tangentes en guía ridge redondeada en función de la distancia media de cada tramo a la fuente.....	141
Figura 4.16 Ubicación de 20 puntos de forma uniforme y saltando los vértices, sobre una guía rectangular.	142
Figura 4.17 Ubicación de imágenes de forma circular alrededor de una guía ridge redondeada y una guía rombo.	142
Figura 4.18 Ubicación de imágenes mediante posicionamiento especular. Ejemplos con una guía cuadrada de bordes redondeados y una guía triangular.	143
Figura 4.19 Ubicación de imágenes en tramos curvos	144
Figura 4.20 Combinación de técnicas de ubicación de imágenes: especular y recta tangente auxiliar para tramos curvos. Ejemplo sobre guía cuadrada con 2 lados redondeados.....	144
Figura 4.21 Ubicación de imágenes siguiendo el contorno de las guías “ridge” y “estrella”	144
Figura 4.22 Reconocimiento de tramos rectos situados entre un punto cualquiera y el exterior de la estructura. Ejemplo con una guía cuadrada.	145
Figura 4.23 Reconocimiento de tramos oblicuos situados entre un punto cualquiera y el exterior de la estructura. Ejemplo con una guía triangular.	146
Figura 4.24 Ejemplo de reconocimiento del interior de estructuras arbitrarias. Visualización en 3D.	147
Figura 4.25 Potenciales para una guía cuadrada de $2 \times 2m$. 300Mhz. 40 imágenes.....	148
Figura 4.26 Potenciales para una guía triangular. 300Mhz. 30 imágenes.....	150
Figura 4.27 Potenciales para una guía rombo. 300Mhz. 30 imágenes.....	151

Figura 4.28 Potenciales para una guía ridge. 300Mhz. 60 imágenes.....	152
Figura 4.29 Potenciales para una guía estrella. 64 imágenes.....	153
Figura 4.30 Representación del potencial escalar en el contorno de una guía cuadrada. 40 imágenes, fuente en el centro de la guía.	155
Figura 4.31 Representación del potencial escalar en el contorno de una guía ridge. 60 imágenes, fuente en el centro de la guía.	156
Figura 4.32 Representación del potencial escalar en el interior de una guía ridge. 60 imágenes situadas a 0.25λ siguiendo el contorno de la guía.	156
Figura 4.33 Representación del Coste del potencial vector en una guía rombo, con 40 imágenes. 300 Mhz, fuente situada en el centro de la guía.	159
Figura 4.34 Representación del Coste del potencial vector en una guía cuadrada con dos lados redondeados, con 64 imágenes. 300 Mhz, fuente situada en el centro de la guía.	160
Figura 4.35 Coste de los potenciales escalar y vector en una guía triangular, 30 imágenes ubicadas de forma circular sin optimizar su radio. Fuente en el origen de coordenadas.	161
Figura 4.36 Evolución del coste en función del radio del círculo que ubica a las 30 imágenes. Guía triangular.	161
Figura 4.37 Ejemplos de ubicación de cargas mediante el método de la variación de la distancia especular. Casos de guía ridge (40 imágenes) y guía rombo (30 imágenes).....	162
Figura 4.38 Ubicación de 64 imágenes en una guía “estrella” mediante un posicionamiento especular sin optimizar. Representación del coste escalar en su contorno.	163
Figura 4.39 Situación final y representación de Costes en el contorno para potencia escalar y vector. Guía estrella, 64 imágenes.	163
Figura 4.40 Situación de partida al analizar una guía rectangular, con 20 imágenes situadas a 0.5λ de la estructura. Representación del coste de los potenciales escalar en el contorno.....	165
Figura 4.41 Evolución del coste del potencial escalar al evaluar una guía rectangular, 20 imágenes.....	166
Figura 4.42 Situación de partida y fin de las 20 imágenes empleadas para analizar una guía ridge.	168
Figura 4.43 Evolución del coste en función del nº de iteración. Optimización de las posiciones de 25 imágenes alrededor de una guía ridge.	168
Figura 4.44 Análisis de una guía cuadrada, 40 imágenes. Fuente en el centro, 15 Ghz.	171
Figura 4.45 Potenciales normalizados en un corte a 16.5m a lo largo del eje ‘x’ desde el borde inferior en una guía cuadrada de 66x66mm. Comparativa de método imágenes y método analítico descrito en [10].	171
Figura 5.1 Numeración de capas y fuentes	178
Figura 5.2 Cilindro a analizar. Radio 1 metro, altura 0.5 metros. 40 imágenes situadas de forma uniforme alrededor de la estructura. Fuente en el centro, a 0.25 metros de altura.....	182
Figura 5.3 Representación de potenciales en el interior de una guía cilíndrica, 1 metro de radio, 0.5 de alto, 40 imágenes alrededor. Fuente en el centro, a 0.25metros. 300Mhz.	183
Figura 5.4 Representación de potenciales en el interior de una guía cilíndrica, 1 metro de radio, 0.5 de alto, 40 imágenes alrededor. Fuente en el centro, a 0.25metros. 600Mhz.	184
Figura 5.5 Corte de los potenciales en el eje X en función de distintas distancias de ubicación de las 50 imágenes empleadas al analizar una guía circular de radio 1metro, 0.5 metros de alto. 300 Mhz.....	184
Figura 5.6 Relación de ángulos en la formulación cartesiana con transformada Sommerfeld.....	186
Figura 4.7 Situación al analizar una guía cuadrada 66x66x30 mm. 50 imágenes, situadas siguiendo su contorno situadas a 15 mm.....	187
Figura 5.8 Potenciales en el interior de una guía cuadrada 66x66x30 mm. 50 imágenes, situadas siguiendo su contorno situadas a 15 mm.....	188
Figura 5.9 Ubicación del corte en el eje X en la guía cuadrada para la visualización de los potenciales....	188
Figura 5.10 Comparación de los potenciales en una guía cuadrada de 66x66x30mm en un corte en el eje X a 16.5mm del eje Y, 50 imágenes, distintas posiciones de las mismas. Fuente en el centro. Se muestra el resultado analítico esperado según [10]. 10 Ghz.	189
Figura 5.11 Situación a analizar: guía cuadrada 66x66x30mm, 40 imágenes ubicadas a 33mm del contorno. Fuente descentrada, situada en (-10.7,0)mm del plano X-Y.	190
Figura 5.12 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30mm en un corte en el eje X a 16.5mm del eje Y, 40 imágenes, ubicadas a 33mm del contorno. Fuente en el centro. Se muestra el resultado analítico esperado según [10]. 4 Ghz.	190
Figura 5.13 Ubicación de imágenes 40 imágenes alrededor de una guía cuadrada 66x66x30mm en función aumentada de su distancia a la fuente (descentrada).....	191
Figura 5.14 Representación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear 40 imágenes situadas en función aumentada de su distancia a la fuente ponderada. 4 Ghz.	191

Figura 5.15 Comparación de los potenciales en un corte de una guía cuadrada de 66x66x30mm en función del número de imágenes empleadas, situadas a 33mm de la guía. 10 Ghz.	192
Figura 5.16 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear un anillo de 40 imágenes variando su distancia a la guía, con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.	193
Figura 5.17 Situación planteada al analizar con 3 anillos una guía cuadrada.....	194
Figura 5.18 Nomenclatura usada para la ubicación de imágenes y puntos tangentes en análisis multianillo	195
Figura 5.19 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear tres anillos de 40 imágenes cada uno, variando su distancia a la guía , con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.	197
Figura 5.20 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte distinto a la altura de la fuente, al emplear tres anillos de 40 imágenes cada uno situados a 33mm de la cavidad , con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.	198
Figura 5.21 Potenciales a media altura de una guía cuadrada de 66x66x30mm, 3 anillos de 50 imágenes cada uno, ubicados a 33mm de la cavidad. Frecuencia de 15Ghz.....	199
Figura 5.22 Comparación de los potenciales en un corte del eje X, en una guía cuadrada de 66x66x30 con un corte cuadrado en su esquina superior derecha de 18x18mm. 80 imágenes. 10Ghz.	201
Figura 5.23 Ubicación de 3 y 5 anillos de 80 imágenes alrededor de una guía cuadrada de 66x66x30 mm que presenta un corte de 18x18mm en su esquina superior derecha.....	202
Figura 5.24 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.	202
Figura 5.25 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia de los mismos a la cavidad dual cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.	203
Figura 5.26 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia cercana de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.....	204
Figura 5.27 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia cercana de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.....	205
Figura 5.28 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos en función del número de imágenes por anillo en una cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.	206
Figura 5.29 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos en función del número de imágenes por anillo en una cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.	207
Figura 5.30 Visualización de “picos” de error en el potencial escalar de una guía cuadrada de 66x66x30mm, con un corte en una esquina de 18x18mm. 6.122Ghz. 60 imágenes.	207
Figura 5.31 Visualización de las matrices del potencial escalar para las guías cuadrada y dual, al emplear 80 imágenes.....	208
Figura 5.32 Ejemplos de guías rombos, con distintos ángulos internos.	208
Figura 5.33 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 90°.	209
Figura 5.34 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 60°.	210
Figura 5.35 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 45°.	210
Figura 5.36 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 30°.	211
Figura 5.37 Potenciales en el eje X de una guía rombo con ángulos internos de 30°. Variación del número de imágenes de un único anillo. Frecuencia de 10Ghz.	212
Figura 5.38 “Picos” de error al analizar una guía rombo con 2 ángulos internos con 30° a 12 Ghz. Potencial vector GAyy.....	212
Figura 5.39 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía cuadrada de 66x66x30mm, empleo de 60 imágenes situadas a 33mm.....	214
Figura 5.40 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía cuadrada de 66x66x30mm, al variar la frecuencia de 5.2 a 7.5Ghz.....	215
Figura 5.41 Potenciales en la primera resonancia de la cavidad cuadrada 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS®.	217
Figura 5.42 Potenciales en la segunda resonancia de la cavidad cuadrada 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS®.	218
Figura 6.1 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía rectangular de 132x66x30mm, empleo de 60 imágenes situadas a 12mm.....	224
Figura 6.2 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía rectangular de 132x66x30mm, al variar la frecuencia de 5.2 a 7.0 Ghz.....	225
Figura 6.3 Potenciales en la primera resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS®.	227
Figura 6.4 Potenciales en la segunda resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS®.	228

Figura 6.5 Potenciales en la tercera resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	229
Figura 6.6 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía triangular de altura 30mm, empleo de 30 imágenes situadas a 12mm.	230
Figura 6.7 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía triangular de altura 30mm, al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.	231
Figura 6.8 Evaluación de los potenciales cruzados en un punto fijo en el interior de una guía triangular de altura 30mm, al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.	231
Figura 6.9 Potenciales en la primera resonancia de una cavidad triangular con 30mm de altura. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	234
Figura 6.10 Potenciales en la segunda resonancia de una cavidad triangular con 30mm de altura. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	235
Figura 6.11 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm y sus 4 ángulos internos a 90°. Empleo de 60 imágenes situadas a 12mm.	236
Figura 6.12 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm al variar la frecuencia de 5 a 15.0 Ghz.	237
Figura 6.13 Potenciales en la primera resonancia de una cavidad rombo de dimensiones 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	238
Figura 6.14 Potenciales cruzados en la primera resonancia de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm.	239
Figura 6.15 Situación de 3 anillos con 60 imágenes cada uno al analizar una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm con sus 4 ángulos internos a 90°.	239
Figura 6.16 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 14.18Ghz de una cavidad rombo de dimensiones 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	240
Figura 6.17 Situación de 1 anillo con 60 imágenes situados sobre una guía en forma de trapecio, de altura 30mm.	241
Figura 6.18 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía trapezoidal de altura 30mm al variar la frecuencia de 4.5 a 9.0 Ghz.	242
Figura 6.19 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.36Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	244
Figura 6.20 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.826Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	245
Figura 6.21 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 8.94Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	246
Figura 6.22 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm en su esquina superior derecha.	247
Figura 6.23 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18 en una esquina, al variar la frecuencia de 4.5 a 9.0 Ghz.	247
Figura 6.24 Potencial escalar en la primera resonancia en función del número de imágenes, guía cuadrada 66x66x30mm con un corte de 18x18 en su esquina superior derecha.	250
Figura 6.25 Campo eléctrico E_z obtenido en una guía dual en la primera resonancia, a 6.122Ghz.	250
Figura 6.26 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.125Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	251
Figura 6.27 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.629Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	252
Figura 6.28 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 8.952Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	252
Figura 6.29 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía flange de altura 30mm.	253
Figura 6.30 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 1 anillo con 50 imágenes.	254
Figura 6.31 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 3 anillos con 50 imágenes cada uno.	255
Figura 6.32 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 5 anillos con 50 imágenes cada uno.	255
Figura 6.33 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 5 anillos, variación del número de imágenes por anillo.	256
Figura 6.34 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía flange de altura 30mm al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.	257
Figura 6.35 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.155Ghz de una cavidad flange de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	259

Figura 6.36 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 8.419Ghz de una cavidad flange de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.....	260
Figura 6.37 Situación de 1 anillo con 150 imágenes situados sobre una guía estrella de altura 30mm.	261
Figura 6.38 “Picos” de error en los vértices de una guía estrella al ser analizada con 70 imágenes.....	261
Figura 6.39 Potenciales en ejes ‘x’ e ‘y’ al variar el número de imágenes en el análisis de una guía estrella.....	262
Figura 6.40 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía estrella de altura 30mm al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.	263
Figura 6.41 Primer modo de resonancia en una guía estrella de altura 30mm. Frecuencia 5.723 Ghz	264
Figura 6.42 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 6.9358Ghz de una cavidad tipo estrella de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	265
Figura 6.43 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía ridge de altura 30mm.....	266
Figura 6.44 “Picos” de error en los vértices de una guía ridge al ser analizada con 70 imágenes	266
Figura 6.45 Potenciales en el eje ‘x’ al variar el número de imágenes en el análisis de una guía ridge.....	267
Figura 6.46 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía ridge de altura 30mm al variar la frecuencia de 7 a 10.5 Ghz.	268
Figura 6.47 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.893Ghz de una cavidad tipo ridge de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	269
Figura 6.48 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 9.1127Ghz de una cavidad tipo ridge de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.	270
Figura 6.49 Guía cuadrada multicapa y ubicación de 50 imágenes alrededor de la misma.	271
Figura 6.50 Potenciales en el eje ‘x’ al variar la distancia de 50 imágenes a una guía cuadrada con dos dieléctricos en su interior.	271
Figura 6.51 Potenciales vector al realizar un barrido en un punto fijo entre 2 y 7 Ghz en una guía cuadrada con 2 dieléctricos. Comparación con el método analítico descrito en [10].....	272
Figura 6.52 Comparación de los potenciales en una guía cuadrada de 66x66x30mm con un dieléctrico de 15mm con $\epsilon_r = 2$. Validación con los resultados obtenidos en [10].....	273
Figura 6.53 Potencial escalar a 5.5Ghz en una guía cuadrada de 120x120mm, con dos capas de 12mm, una de ellas aire y la otra con permitividad de valor 2.	273

Índice de Tablas

Tabla 1.1 Ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial e integral.....	5
Tabla 1.2 Magnitudes electromagnéticas.....	5
Tabla 1.3 Tipos de permitividad y permeabilidad en función del medio.....	6
Tabla 3.1 Coste método original, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	52
Tabla 3.2 Coste método original, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	52
Tabla 3.3 Coste método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	52
Tabla 3.4 Coste método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	52
Tabla 3.5 Coste método original, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$	53
Tabla 3.6 Coste método original, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	53
Tabla 3.7 Resultado del coste al realizar una ubicación de cargas teniendo en cuenta el máximo del potencial, de forma iterativa, y teniendo en cuenta el número de cargas de la situación de inicio	65
Tabla 3.8 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	73
Tabla 3.9 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	74
Tabla 3.10 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	75
Tabla 3.11 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	75
Tabla 3.12 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$	76
Tabla 3.13 Coste variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	76
Tabla 3.14 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$	85
Tabla 3.15 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	86
Tabla 3.16 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	86
Tabla 3.17 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	86
Tabla 3.18 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$	87
Tabla 3.19 Coste optimizando cargas para distintos n° de imágenes, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	87
Tabla 3.20 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$	97
Tabla 3.21 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	98
Tabla 3.22 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	98
Tabla 3.23 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	98
Tabla 3.24 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$	98
Tabla 3.25 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	99
Tabla 3.26 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$	100
Tabla 3.27 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	101
Tabla 3.28 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$	102
Tabla 3.29 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	102
Tabla 3.30 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$	103
Tabla 3.31 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	103
Tabla 3.32 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	110
Tabla 3.33 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	110
Tabla 3.34 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	110
Tabla 3.35 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	111
Tabla 3.36 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$	111
Tabla 3.37 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	111
Tabla 3.38 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$	115
Tabla 3.39 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$	116
Tabla 3.40 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$	116
Tabla 3.41 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$	117
Tabla 3.42 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$	117
Tabla 3.43 Coste vectorial variación radio para distintos n° de cargas, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$	117
Tabla 4.1 Coste escalar y vector al analizar distintas guías con todos los métodos de optimización presentados.....	169
Tabla 4.2 Posibles valores del parámetro “Ubicación de pto tangentes”	173

Tabla 4.3 Posibles valores del parámetro “Ubicación de imágenes”	173
Tabla 5.1 Frecuencias de resonancia de los primeros modos de una cavidad cuadrada de 66x66x30mm.....	214
Tabla 5.2 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía cuadrada de 66x66x30mm.....	215
Tabla 6.1 Frecuencias de resonancia de los primeros modos de una cavidad rectangular de 132x66x30mm.....	224
Tabla 6.2 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rectangular de 132x66x30mm.	226
Tabla 6.3 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rectangular de 132x66x30mm.	232
Tabla 6.4 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rombo de 66x66x30mm, con sus cuadro ángulos internos a 90°.....	237
Tabla 6.5 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía trapecio de 30mm de altura.....	242
Tabla 6.6 Precisión al obtener las resonancias el potencial escalar en una guía dual	248
Tabla 6.7 Precisión al obtener las resonancias el potencial vector en una guía dual.....	248
Tabla 6.8 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura.....	257
Tabla 6.9 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura.....	263
Tabla 6.10 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura.....	268
Tabla AI.1 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.0λ ,0.0λ).....	279
Tabla AI.2 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.2λ ,0.2λ).....	280
Tabla AI.3 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.4λ ,0.0λ).....	281
Tabla AI.4 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.4λ ,0.4λ).....	281
Tabla AI.5 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.5λ ,0.0λ).....	282
Tabla AI.6 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.7λ ,0.7λ).....	282
Tabla AII.1 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.0λ ,0.0λ)	283
Tabla AII.2 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.2λ ,0.2λ)	284
Tabla AII.4 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.4λ ,0.0λ)	284
Tabla AII.5 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.4λ ,0.4λ)	285
Tabla AII.6 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.5λ ,0.0λ)	285
Tabla AII.7 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.7λ ,0.7λ)	286

1. Introducción

1.1 Descripción del proyecto

1.1.1 Planteamiento inicial del proyecto

En la actualidad el uso de las comunicaciones móviles y por satélite se encuentra en pleno apogeo. Estas tecnologías requieren de muchos componentes como puedan ser antenas, circuitos de radiofrecuencia, filtros, circuitos de cavidad, etc. El estudio y caracterización de estos componentes es fundamental para conocer su funcionamiento y poder diseñar sistemas con unas mayores prestaciones y calidad. Así, se plantean problemas de índole electromagnética, cuya solución se basa en las conocidas ecuaciones de Maxwell.

En una gran cantidad de situaciones reales estas ecuaciones no presentan soluciones analíticas debido a su complejidad, siendo necesario recurrir a diversas técnicas numéricas para su resolución que nos proporcionaran unos resultados más o menos aproximados en función del método elegido y del caso ante el que nos encontremos.

Existen una gran cantidad de estas técnicas numéricas, entre ellas destacamos la FDTD (Finite Differences in Time Domain), la técnica modal, la técnica de los elementos finitos ó la técnica de la ecuación integral. La elección entre un método u otro dependerá del tipo de problema, coste computacional de su solución, geometría a analizar, etc.

El uso de la ecuación integral se encuentra muy extendido para abordar problemas de análisis electromagnético, empleándose en una gran cantidad de estructuras y circuitos de radiofrecuencia usados en comunicaciones móviles y por satélite. En general, esta técnica se ha empleado con éxito en múltiples escenarios: análisis de antenas radiando en condiciones de espacio libre [1], análisis de circuitos de radiofrecuencia multicapa [2], problemas y circuitos en guíaonda y para antenas de cavidad [3], etc.

El principal problema encontrado en los casos citados se debe al cálculo de las funciones de Green que tengan en cuenta las paredes laterales de la guíaonda. En este campo, se han desarrollado formulaciones tanto espaciales como espectrales aplicadas a circuitos en guías rectangulares. Esto es debido a que para esta sencilla geometría, las funciones de Green pueden ser formuladas como series infinitas de convergencia lenta, tanto en el dominio espectral como en el dominio espacial [4]. En el caso de otras geometrías más complejas, resulta muy difícil el cálculo de las funciones de Green necesarias para poder aplicar la ecuación integral. Por ejemplo, existen trabajos que han abordado la geometría circular, formulando las funciones de Green en forma de series de funciones de Bessel en el dominio espectral [5]. Por contra, no existen formulaciones para la guía circular en el dominio espacial debido a la dificultad de encontrar una geometría de imágenes que satisfagan directamente las condiciones de contorno de los campos electromagnéticos en las paredes laterales de la guía. Todavía mas complicado resulta encontrar formulaciones para guías de geometría más compleja, no existiendo formulaciones sencillas ni en el dominio espacial ni espectral.

Recientemente, una nueva formulación para el tratamiento de la guía circular mediante la ecuación integral ha sido desarrollada por la UPCT [6,7]. Esta formulación está basada en el dominio espacial por primera vez.

El presente proyecto trata de continuar con el desarrollo de esta técnica, buscando su mejora para analizar de forma más precisa circuitos en guía circular y extender la técnica para poder tratar guías de geometrías más complejas, en principio arbitrarias. Ejemplos serían guías ridge, cavidades en modo dual, etc.

1.1.2 Objetivos

El proyecto presenta un objetivo doble:

- Estudio y mejora de la técnica de las imágenes espaciales finita, desarrollada por la UPCT, para el análisis de circuitos en guía circular.
- Extensión de la técnica de las imágenes espaciales a guías de geometría arbitraria, mucho más complejas (guías ridge, filtros en modo dual, etc).

En primer lugar, se tratará de aumentar la precisión de la técnica aplicada a guías circulares. Así tras la ubicación de una serie de imágenes alrededor de la guía para forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno, se obtendrá una medida de la precisión obtenida y se optimizará esta precisión mediante diversas técnicas, variando la posición y el valor de estas imágenes.

En segundo lugar, se extenderá la técnica para poder analizar estructuras con una geometría mucho más compleja. Así se propone el análisis de cavidades cuadradas, rectangulares, triangulares, ridge, etc. Otra característica que presenta el método es la posibilidad de cálculo de las frecuencias de resonancia de estas cavidades. En cuanto a la validación de los resultados, se podrá realizar de forma numérica para las cavidades cuadrada y rectangular (pues tienen solución analítica [8]) y se empleará el software comercial HFSS© para la validación del resto de resultados.

1.1.3 Estructura del proyecto

El proyecto se ha dividido en un total de 7 capítulos.

En primer lugar, se presenta de forma breve la teoría electromagnética haciendo hincapié en las ecuaciones de Maxwell. Se realiza una pequeña descripción de los distintos métodos numéricos existentes, para posteriormente centrarnos en el estudio de la ecuación integral.

En el capítulo 2 se estudia la técnica de las imágenes espaciales [6,7] para el estudio de estructuras cilíndricas bidimensionales, formulándose tanto para fuentes eléctricas como magnéticas.

Posteriormente, en el capítulo 3, se busca una optimización del método anterior, usando una medida de la corrección del cálculo de potenciales realizados (un “coste”) y

optimizando el mismo mediante múltiples técnicas. Destacan sobre las demás la variación dinámica de la ubicación de las imágenes espaciales (modificando el valor del radio del círculo en el que se encuentran) y la optimización del valor complejo y posición de las mismas mediante un algoritmo de descenso de gradiente.

En el capítulo 4 se extiende la teoría de las imágenes espaciales a estructuras arbitrarias. Para ello, se desarrolla un software capaz de analizar cualquier geometría sin más que definirla. De esta manera, se estudian los potenciales en guías cuadradas, rectangulares, ridges, triangulares, etc. Posteriormente, se realiza una extensión de los métodos de optimización presentados en el capítulo 3, con el fin de evaluar la precisión en el análisis de las distintas guías.

En el capítulo 5 se plantea el análisis de cavidades tridimensionales (tanto circulares como arbitrarias) empleando para ello la transformada de Sommerfeld [9]. Además, realizan análisis tanto de estructuras eléctricamente cortas (mediante un único anillo de imágenes) como de estructuras eléctricamente largas (empleando para ello varios anillos situados a distintas alturas que envuelven la cavidad). Todos los análisis son validados para una estructura cuadrada, basándose en un método analítico expuesto en [10]. Finalmente, se propone un método para el cálculo de las frecuencias de resonancia de la cavidad analizada.

En el capítulo 6 se utilizan todas las técnicas empleadas anteriormente para realizar el análisis de cavidades tridimensionales reales, calculando sus frecuencias de resonancia y mostrando los potenciales obtenidos a esas frecuencias (observándose el modo que se propaga en el interior de la guía). Los distintos resultados serán validados mediante el software comercial HFSS®.

En el último capítulo se extraerán las conclusiones de todo el proyecto y se propondrán distintas líneas de investigación futuras.

Finalmente se mostrarán dos Anexos, con resultados sobre el método de integración por pulsos desarrollado en el capítulo 3, y para terminar se mostrarán las distintas referencias y fuentes empleadas a lo largo del proyecto.

1.1.4 Aportaciones novedosas

El presente proyecto aporta diversos puntos de vista, enfoques y técnicas novedosas, con el fin de facilitar el análisis electromagnético de cavidades tanto circulares en primer lugar, como arbitrarias.

En un primer punto, se realiza un aumento de la precisión de la técnica de las imágenes espaciales aplicada a cavidades circulares. Para ello, se ha introducido un nuevo concepto como es el “coste” ó “precisión” que tenemos en el análisis, siendo una medida de la corrección con la que estamos resolviendo el problema. Sobre este “coste” se han aplicado diversas técnicas de optimización: por gradiente descendente, por variación de las ubicaciones de las imágenes, aumento dinámico de las imágenes en función de la región de la cavidad, etc. Este conjunto de técnicas han proporcionado un aumento considerable de la precisión a la hora de la resolución de circuitos en guías circulares.

En segundo lugar, se ha extendido por primera vez la formulación de imágenes espaciales a geometrías arbitrarias multicapa empleando para ello la transformada de Sommerfeld [9]. Además, se ha realizado el análisis tanto de estructuras eléctricamente cortas (mediante un único anillo de imágenes espaciales) como de estructuras eléctricamente largas (empleando varios anillos de imágenes que envuelven la geometría a analizar en distintas alturas). Como resultado, se ha obtenido por primera vez la función de Green en medios multicapa de geometría arbitraria.

Finalmente, destacar que se ha conseguido hallar mediante el método de las imágenes espaciales las frecuencias de resonancia en cavidades de geometría arbitraria, obteniéndose una elevada precisión.

De esta forma se abre la puerta al análisis mediante la ecuación integral de circuitos inmersos en guías de onda de geometría arbitraria, solventando el problema del cálculo de las funciones de Green en su interior.

1.1.5 Software desarrollado

Para implementar los distintos planteamientos desarrollados en el presente proyecto, se ha elegido el lenguaje de programación FORTRAN 90 debido a su orientación hacia el cálculo científico y numérico, siendo destacable su gran velocidad de procesamiento de datos. Aunque el cálculo numérico corre a cargo de Fortran 90, la representación gráfica de los resultados se ha realizado mediante el software comercial Matlab®, debido a su versatilidad en el manejo de todo tipo de gráficos así como la posibilidad de modificar los resultados obtenidos.

El código realizado es portable entre distintos sistemas como puedan ser Windows® y Linux.

Debido a la gran extensión que presenta el código de los distintos programas realizados, no vamos a exponerlo de forma detallada; únicamente indicaremos los parámetros de entrada de los distintos programas y la forma de visualizar/obtener los resultados. Estos parámetros de entrada (como pueden ser la frecuencia, número de puntos de la visualización, dimensiones geométricas, etc) se deben de introducir en un fichero de texto, que el software analizará. Los distintos resultados son grabados en ficheros de salida, que serán interpretados de forma correcta por Matlab®.

En cuanto al código en si, todos los programas (tanto de Fortran 90 como de Matlab®) se encuentran debidamente comentados, explicando el funcionamiento de cada parte. Ello facilitará un uso posterior del software desarrollado, para cualquier tipo de aplicación práctica.

1.2 Conceptos de electromagnetismo

1.2.1 Ecuaciones de Maxwell

Si hay un punto de inflexión a lo largo de la historia en el estudio del electromagnetismo, éste se produjo en 1865 con la propuesta de James Maxwell de sus famosas ecuaciones, que tras ser reformuladas en 1880 se pueden expresar de la siguiente manera:

Nombre	Forma diferencial	Forma Integral
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$
Ley de Gauss (ausencia de monopolos magnéticos)	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Ley de Ampère generalizada	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{A}$

Tabla 1.1 Ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial e integral.

El paso entre la forma diferencial e integral de las ecuaciones de Maxwell se realiza mediante las transformaciones de los teoremas de la divergencia y de Stokes. Los símbolos empleados en la tabla anterior y su unidad de medida (en el Sistema Internacional) son los siguientes:

Símbolo	Significado	Unidad de medida
\vec{E}	Campo eléctrico	V/m
\vec{H}	Campo magnético	A/m
\vec{D}	Densidad de campo eléctrico	C/m^2
\vec{B}	Densidad de campo magnético	T ó Wb/m^2
ρ	Densidad de carga eléctrica	C/m^3
\vec{J}	Densidad de corriente	A/m^2

Tabla 1.2 Magnitudes electromagnéticas

De las ecuaciones anteriores, se deduce la denominada *ecuación de la continuidad*, tomando para ello la divergencia de la ley de Ampère. Esta ecuación establece la conservación de la carga y presenta la forma:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1)$$

Además de la corriente de desplazamiento $\partial \vec{D} / \partial t$, ya puesta de manifiesto en la ley de Ampère, pueden existir en cada punto corrientes de conducción (la denominada como ley de Ohm):

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.2)$$

donde σ es la conductividad en Siemens/metro.

Las ecuaciones de Maxwell presentadas en la tabla 1.1 se pueden simplificar de forma considerable teniendo en cuenta la situación que se está analizando: así por ejemplo en espacio libre las corrientes y cargas son cero, si las fuentes varían armónicamente con el tiempo se podrá emplear una notación fasorial ó en casos donde no se presente una variación temporal, las ecuaciones tomarán las formas de electrostática y magnetoestática. Todas estas simplificaciones pueden ser estudiadas en cualquier libro de electromagnetismo, como en [8].

En medios materiales, se debe de considerar la relación entre los vectores intensidad (\vec{E}, \vec{H}) y densidad (\vec{D}, \vec{B}) , mediante la permitividad eléctrica ε y la permeabilidad magnética μ . En general se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde ε_r y μ_r son los valores relativos mientras que ε_0 y μ_0 son los valores en el vacío, siendo éstos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} H/m \end{aligned} \quad (1.4)$$

En función del tipo de medio en el que nos encontremos, los valores relativos de la permitividad y la permeabilidad serán reales, complejos, etc. En la tabla siguiente se muestra el tipo de magnitud que adquieren en función del tipo de medio en el que se realice el análisis:

Permitividad, Permeabilidad	Tipo de medio
<i>Real</i>	<i>Sin pérdidas</i>
<i>Compleja</i>	<i>Con pérdidas</i>
<i>Escalar</i>	<i>Isótropo</i>
<i>Matriz</i>	<i>Anisótropo</i>
<i>Constante</i>	<i>Homogéneo</i>
<i>Variable</i>	<i>Inhomogéneo</i>

Tabla 1.3 Tipos de permitividad y permeabilidad en función del medio

En la resolución de la mayoría de los problemas de electromagnetismo, será necesario definir unas *condiciones de contorno* entre los distintos medios que compongan el problema. Estas condiciones de contorno son en general definidas por el valor ó continuidad de la función potencial sobre la superficie (conocida como la condición de Dirichlet) y/o el valor o la continuidad de la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie (conocida como la condición de Neumann) e incluso una mezcla de estas condiciones.

Al considerar dos medios cualesquiera (denominados medio 1 y 2) estas condiciones de contorno las podemos expresar como:

$$\begin{aligned}
 \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho \\
 \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= -\vec{M} \\
 \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0 \\
 \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie.

Las condiciones de contorno para un conductor perfecto son:

$$\begin{aligned}
 \hat{n} \times \vec{E} &= 0 \\
 \hat{n} \times \vec{H} &= \vec{J}_s
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico total en la superficie del conductor, \vec{H} es el campo magnético total en la superficie del conductor y \vec{J}_s es la densidad de corriente superficial.

1.2.2 Métodos numéricos

La solución analítica de los problemas electromagnéticos sólo es posible para algunos casos muy particulares, en la que las condiciones de contorno se aplican a superficies con alguna coordenada constante en un sistema de coordenadas en el que la ecuación de onda sea separable. Por ejemplo, las soluciones modales para guías de onda rectangular ó cilíndrica, difracción de una onda incidente por objetos esféricos, etc.

Sin embargo en la mayoría de los casos reales, no es posible una solución analítica por lo que es necesario recurrir a la solución numérica del problema.

El trabajar con método numéricos implica que estamos calculando una *aproximación* de la solución del problema. El error que aparece en la solución obtenida es debido tanto a las aproximaciones realizadas en la formulación matemática, en el modelo geométrico, en la imposición de las condiciones de contorno e incluso en la implementación numérica en ordenador (por ejemplo, debido a truncamientos entre números reales con representación finita ó la enorme precisión requerida para resolver sistemas de ecuaciones mal condicionados).

Sin embargo, a pesar de los problemas que plantean, son la única manera de resolver problemas electromagnéticos de forma general y se consigue una enorme precisión en las soluciones encontradas si el planteamiento y método escogido es el adecuado.

Existen una gran cantidad de métodos numéricos, realizándose una primera clasificación en dos grandes familias, en función del dominio en el que se trabaje:

a) Métodos en el dominio del tiempo (TD): En el que se emplea una formulación temporal de los problemas electromagnéticos.

b) Métodos en el dominio de la frecuencia (FD): Empleándose en este caso una formulación frecuencial.

Si realizamos la clasificación en función del tipo de ecuaciones electromagnéticas, la clasificación será entonces:

a) Métodos diferenciales (FD): Discretizan directamente las ecuaciones de Maxwell o la ecuación de onda, representando las derivadas mediante la aproximación de diferencias finitas. Según el dominio en el que se realice, toman el nombre de *diferencias finitas en el dominio de del tiempo* (FDTD) ó *diferencias finitas en el dominio de la frecuencia* (FDFD).

b) Métodos integrales: Se basan en aplicar el teorema de la equivalencia, calculando los campos mediante la integral de radiación de las corrientes y en la imposición de las condiciones de contorno al campo resultante. Entre las técnicas, se destaca el método de los momentos [11] y el método del gradiente conjugado.

c) Métodos variacionales: Se basan en la definición de un funcional estacionario, una cantidad escalar función de los campos eléctrico ó magnético que presenta un máximo o mínimo cuando los campos son la solución del problema. De entre estos métodos destaca por su importancia el método de los elementos finitos (FEM), que aproxima de forma simultánea la solución y la geometría mediante polinomios de interpolación.

d) Métodos de alta frecuencia: Utilizados fundamentalmente cuando el coste computacional de los métodos anteriores lo hacen inviables. Destaca la teoría geométrica de la difracción.

1.2.3 Ecuación Integral

El método de la ecuación integral parte de la definición de los campos eléctrico y magnético en la que se tiene en cuenta unas funciones escalares y potenciales auxiliares empleadas para simplificar los cálculos.

Si empleamos estas funciones y expresamos los campos en el dominio frecuencial, obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi_e - \frac{1}{\epsilon}\nabla\times\vec{F} \\ \vec{H} &= -j\omega\vec{F} - \nabla\Phi_m - \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}\end{aligned}\tag{1.7}$$

En la ecuación anterior \vec{A} y \vec{F} son los potenciales vector eléctrico y magnético respectivamente y pueden expresarse en función de las densidades de corriente eléctrica \vec{J} y magnética \vec{M} como:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}') &= \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dS' \\ \vec{F}(\vec{r}') &= \epsilon \iint_{S'} \vec{M}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dS'\end{aligned}\tag{1.8}$$

Por su parte, los potenciales eléctrico (Φ_e) y magnético (Φ_m) se expresan en función de las densidades de carga eléctrica (ρ_e) y magnética (ρ_m):

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S'} \rho_e(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dS' \\ \Phi_m &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S'} \rho_m(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dS'\end{aligned}\quad (1.9)$$

Destacar la presencia en todas las ecuaciones anteriores de $G(\vec{r} - \vec{r}')$ que es la denominada función de Green del medio homogéneo, definida como respuesta al impulso de la ecuación de Helmholtz:

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.10)$$

Como se comentó anteriormente, el método de la ecuación integral consiste en calcular los campos radiados por las corrientes que fluyen en el interior o sobre la superficie del objeto y en imponer las condiciones de contorno a los campos resultantes. Estas corrientes son desconocidas, constituyendo la incógnita del problema y encontrándose en el interior de una integral, de ahí el nombre del método.

Para el cálculo de las integrales de radiación de las corrientes, se debe emplear una función de Green que tenga en cuenta la geometría real de la estructura y no la del espacio libre presentada en la ecuación 1.10. Esto constituye uno de los problemas más importantes de la técnica de la ecuación integral cuando aparecen geometrías complejas, como es el caso de cavidades de forma arbitraria. A lo largo de todo el proyecto se presentará la técnica de las imágenes espaciales, que permite obtener esta función de Green (y sus potenciales asociados) teniendo en cuenta la presencia de la cavidad de geometría arbitraria a analizar, permitiendo de este modo el empleo de la técnica de la ecuación integral en situaciones hasta ahora no contempladas.

Si suponemos un objeto conductor perfecto dentro del espacio libre, deberá de cumplir las condiciones de contorno expresadas en la ecuación 1.6. Así surgirán la ecuación integral de campo eléctrico (EFIE) y la ecuación integral de campo magnético (MFIE).

En el caso de EFIE, surge de imponer la nulidad del campo eléctrico tangencial a las paredes de un conductor como condición de contorno. Así, teniendo en cuenta que el campo eléctrico total será el de excitación más el dispersado por el objeto, tendremos:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_{ind}(\vec{r}') + \vec{E}_s(\vec{r}')) = 0 \quad (1.11)$$

Además al trabajar con un cuerpo conductor, no consideraremos ni las cargas ni las corrientes magnéticas, por lo que $\vec{M} = \Phi_m = 0$ y tras simplificar la ecuación obtenemos la expresión de EFIE, aplicable tanto para el análisis de estructuras abiertas como cerradas.

$$\hat{n} \times \vec{E}_{ind}(\vec{r}') = \hat{n} \times \left(\begin{aligned} & \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \iint_S \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} dS + \\ & \frac{j}{4\pi\omega\epsilon_0} \nabla \iint_S \nabla'_s \cdot \iint_S \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} dS \end{aligned} \right) \quad (1.12)$$

Por su parte para el caso de MFIE, se impone que la densidad de corriente inducida es igual al campo magnético tangencial al conductor. Así se debe de verificar que:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_{ind}(\vec{r}') + \vec{H}_s(\vec{r}')) = \vec{J}(\vec{r}') \quad (1.13)$$

Teniendo en cuenta de nuevo que trabajamos con un conductor, podemos expresar la condición anterior como la ecuación de MFIE válida para el estudio de geometrías cerradas:

$$\hat{n} \times \vec{H}_{ind} = \vec{J}(\vec{r}') - \lim_{\vec{r} \rightarrow S} \left\{ \hat{n} \times \left(\nabla \times \iint_S \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} dS \right) \right\} \quad (1.14)$$

Destacar que si el objeto conductor se encuentra en presencia de una cavidad, la función de Green a emplear ya no es la 1.10 sino que es mucho más compleja. En este proyecto se tratará de calcular estas funciones de Green en presencia de cavidades de geometría arbitraria, empleando para ello la técnica de las imágenes espaciales.

No es objetivo de esta pequeña introducción un estudio en profundidad del resto de expresiones de la ecuación integral, para lo que se remite a [9]. Si indicar que existen otras formulaciones alternativas como la CFIE, DMFIE, AMFIE, etc.

Para el análisis de estas expresiones mediante un ordenador, es necesario discretizar las funciones y operadores y convertir la ecuación funcional en una ecuación matricial. En el caso de la ecuación integral, se emplea principalmente el método de los momentos [11] propuesto en 1968 por Harrington. Este método constituye la herramienta de análisis numérico más utilizada actualmente en electromagnetismo.

2. Formulación espacial en cavidades circulares

En este segundo capítulo vamos a desarrollar la formulación espacial de imágenes para el cálculo de las funciones de Green en un recinto cilíndrico cerrado.

La técnica consiste en situar cargas ó dipolos imágenes fuera de la región cilíndrica. Su situación y orientación se calculan mediante la imposición de las condiciones de contorno para los campos, en puntos discretos de la pared metálica, obteniéndose una rápida convergencia numérica, y demostrándose unos resultados precisos para poder analizar estructuras reales [6,7].

Dividiremos la formulación en dos apartados:

- Formulación para fuentes eléctricas
- Formulación para fuentes magnéticas

Aunque las bases de la formulación es el mismo, existe una diferencia fundamental: las condiciones de contorno a cumplir varían en función del tipo de fuente, por lo que ha sido necesario rehacer completamente la formulación para cada caso.

Desarrollaremos de forma detallada ambas formulaciones explicando sus características y ecuaciones numéricas cerradas finales. En el mismo, consideraremos un corte infinitesimal del cilindro, sin considerar por tanto su longitud en el eje ‘z’ (que estudiaremos en un capítulo posterior). Todos los potenciales calculados lo están sobre ese corte infinitesimal.

A lo largo del presente trabajo nos centraremos en el caso de fuentes eléctricas, no obstante los resultados son válidos para la otra formulación, sin más que trasladar los resultados (no son duales debido a las diferentes condiciones de contorno a cumplir).

De esta forma, para el caso de las fuentes eléctricas vamos a presentar una gran cantidad de casos que demostrarán el funcionamiento de la formulación empleada, variando el número de imágenes empleadas, la posición de la fuente en el interior de la cavidad etc. En todos los casos estudiaremos el potencial escalar y el potencial vectorial magnético, mostrando resultando gráficos que muestren el comportamiento de los mismos.

Finalmente, se incluyen referencias al código fuente programado así como instrucciones para su uso y representación de resultados.

Tal y como se comentó en la introducción, el lenguaje de programación elegido ha sido FORTRAN 90 debido a su orientación hacia el cálculo científico y numérico, siendo destacable su gran portabilidad. Prueba de esta portabilidad es que el código ha sido desarrollado y probado tanto en sistemas Linux como sistemas Windows.

En cuanto a las representaciones gráficas y tratamiento de resultados, se ha escogido Matlab, gracias a la facilidad de uso que presenta y la posibilidad de tratar los datos obtenidos. La comunicación entre ambos entornos la realizaremos mediante archivos de texto independientes.

2.1 Formulación espacial con fuentes eléctricas

2.1.1 Desarrollo de la formulación

La geometría empleada para el cálculo de las funciones de Green escalar y vectorial, es un cilindro, tal y como se muestra en la figura 1:

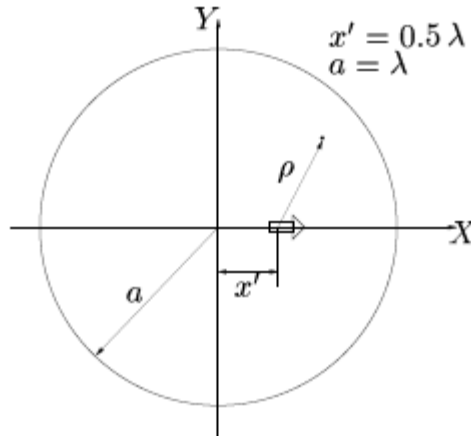


Figura 2.1 Dipolo unitario situado en el interior de la cavidad cilíndrica

Realizaremos un estudio tanto para el potencial vectorial como para el potencial escalar.

El campo creado por la fuente eléctrica será:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla V = -j\omega\vec{A} - j\frac{\nabla(\nabla\vec{A})}{\omega\mu\epsilon} \quad (2.1)$$

Para el caso del *potencial escalar*, vamos a imponer la condición de contorno que será un potencial nulo a lo largo de la pared del cilindro. No obstante, debido a la continuidad del contorno, nos centraremos en un punto discreto de la pared del cilindro, denominándolo punto tangente 'i'.

A este punto tangente, sobre el que vamos a imponer la condición de contorno, irá relacionada una carga/dipolo imagen de valor complejo, cuya posición vendrá determinada por la simetría de la fuente (situada en el interior del cilindro) por un plano tangente al punto 'i', tal y como podemos observar en la figura 2.2:

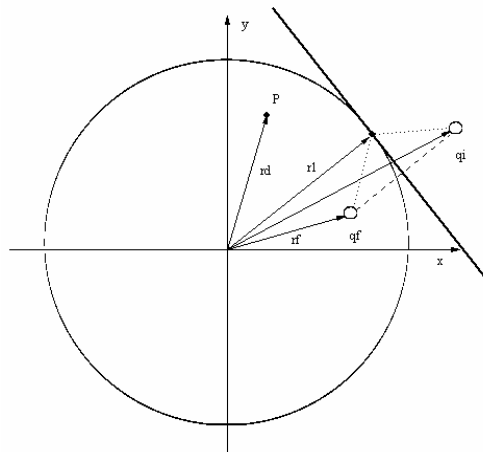


Figura 2.2 Situación una carga imagen respecto al cilindro

En este punto deberemos calcular la posición de la carga/dipolo imagen, dada la posición de la fuente (q_f) y un punto tangente 'i' (del contorno del cilindro) sobre el que imponemos un plano de simetría.

La ecuación de la recta tangente al punto 'i' tendrá la forma de la ecuación normal de la recta:

$$x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) = R \quad (2.2)$$

Calcularemos a continuación la distancia desde la carga fuente ' q_f ', que tiene unas coordenadas (x_1, y_1) a la recta tangente al punto 'i' [con coordenadas (x_2, y_2)], para después, por simetría obtener las coordenadas de la carga imagen (I_x, I_y):

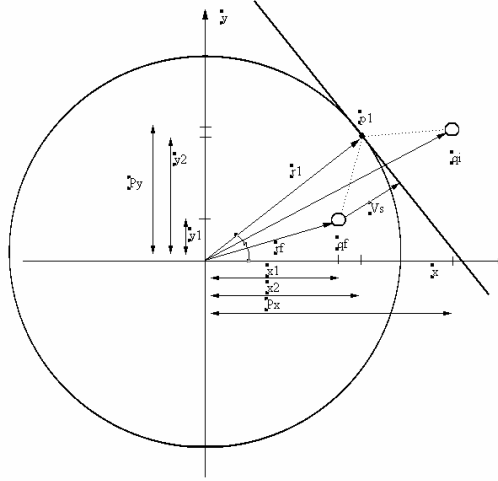


Figura 2.3 Distancias empleadas para el cálculo de la posición de la carga imagen

Esta distancia será:

$$d(P_f, recta) = \frac{|\cos(\varphi) \cdot x_1 + \sin(\varphi) \cdot y_1 - R|}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}} = |\cos(\varphi) \cdot x_1 + \sin(\varphi) \cdot y_1 - R| = d_i \quad (2.3)$$

Por lo que la posición de la carga imagen será:

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \cos(\varphi) \cdot V_s + x_1 = 2 \frac{x_2}{R} d_i + x_1 \\ P_y &= 2 \sin(\varphi) \cdot V_s + y_1 = 2 \frac{y_2}{R} d_i + y_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para conseguir un potencial nulo en el punto 'i' de la pared del cilindro, imponemos la condición de que los potenciales de las cargas se anulen en dicho punto:

$$q_1 \cdot G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_1') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \quad (2.5)$$

Por tanto, el efecto de la carga fuente y de la carga imagen proporcionarán un potencial escalar en todo el cilindro de:

$$G_{v_{cyl}}(\vec{r}) = G_v(\vec{r}, \vec{r}_o') + q_1 \cdot G_v(\vec{r}, \vec{r}_1') \quad (2.6)$$

Siendo $G_v(\vec{r}, \vec{r}')$ el potencial de una carga en condiciones de espacio libre:

$$G_v(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jko|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.7)$$

Hasta ahora hemos impuesto la condición de potencial nulo en un único punto del contorno del cilindro, no obstante es deseable la presencia de más puntos con el fin de poder satisfacer la condición en toda la pared del cilindro. Para ello, empleando la misma estrategia que ahora, la extenderemos hasta un total de N puntos tangentes en el contorno del cilindro. De esta forma, evaluaremos de forma numérica el valor complejo de las cargas imágenes de forma que satisfagan de forma simultánea que el potencial en todos y cada uno de los puntos tangentes es nulo.

Por ejemplo, la figura 2.4 muestra la situación de dos cargas imagen:

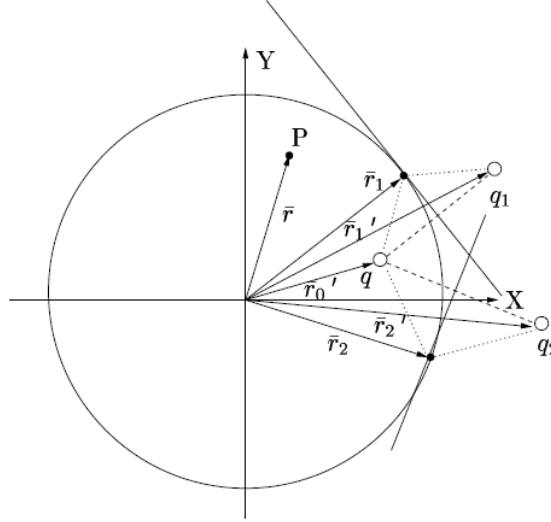


Figura 2.4 Situación de dos cargas imágenes alrededor del cilindro

Extendiendo la ecuación 2.5 a un número N de puntos tangentes alrededor del cilindro, obtenemos el siguiente sistema:

$$\sum_{k=1}^N q_k G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \quad (2.8)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

donde los distintos vectores y su significados se han mostrado en la figura 2.4

Extendiendo la ecuación 2.8, vemos la forma del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} Gv(r_1, r_1') & Gv(r_1, r_2') & \dots & Gv(r_1, r_N') \\ Gv(r_2, r_1') & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Gv(r_N, r_1') & \dots & \dots & Gv(r_N, r_N') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Gv(r_1, r_o') \\ Gv(r_2, r_o') \\ \dots \\ Gv(r_N, r_o') \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La solución de este sistema de N ecuaciones proporciona los valores de las N cargas imágenes (q_k) que son necesarias para satisfacer las condiciones de contorno en los N puntos tangentes establecidos.

Finalmente, obtenemos el potencial escalar en el interior del cilindro mediante la ecuación 2.10:

$$G_{V_{cy}}(\vec{r}) = G_V(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k \cdot G_V(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (2.10)$$

Para la evaluación del vector potencial magnético de la función de Green diádica, realizamos un proceso similar, pero teniendo en cuenta la naturaleza de la magnitud computada. Supongamos para ello un dipolo orientado a lo largo del eje 'x', como podemos observar en la figura 2.5 (el desarrollo del otro caso, suponiendo un dipolo orientado a lo largo del eje 'y' es totalmente similar):

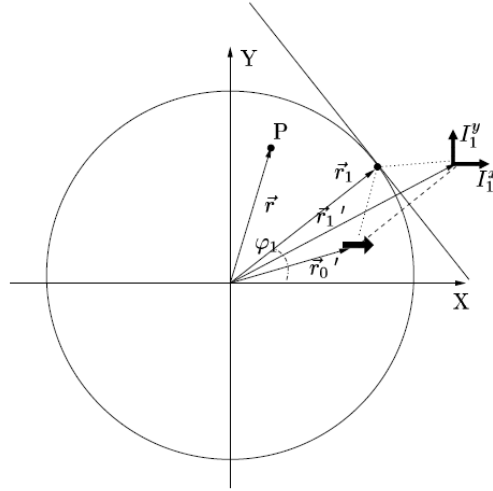


Figura 2.5 Dipolo fuente en el eje 'x' y sus dos dipolos imagen asociados a un punto tangente

Al igual que para el caso del potencial escalar, impondremos en primer lugar las condiciones de contorno a cumplir en un punto discreto 'i' de la pared del cilindro.

En este caso, la componente tangencial del campo eléctrico (definido en la ecuación 2.1) debe ser nulo:

$$\vec{E}_{ptoi} \cdot \hat{e}_t = 0 \quad (2.11)$$

donde \hat{e}_t es el vector tangente al punto 'i' de la estructura; esto conlleva a dos diferentes condiciones, obtenidas tras analizar el campo eléctrico \vec{E} definido por la ecuación 2.1

$$\hat{e}_p \times \vec{A} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.13)$$

donde \hat{e}_p es el vector normal al punto 'i' de la estructura.

Así, impondremos de forma conjunta sobre el punto tangente 'i' las dos condiciones definidas por las ecuaciones 2.12 y 2.13.

Para satisfacer estas condiciones, se propone el empleo de dos dipolos eléctricos ortogonales, uno orientado en el eje 'x' y el otro en el eje 'y', tal y como podemos observar en la figura 2.5

Cada uno de estos dipolos orientados tendrá un determinado peso, que deberemos obtener resolviendo el sistema impuesto en el punto tangente 'i'.

Analizando cada condición por separado:

$$1) \boxed{\hat{e}_p \times \vec{A} = 0}$$

Que nos indica que la componente tangencial del vector potencial \vec{A} debe ser nula, lo que nos anularía el primer término del campo eléctrico en ese punto de la ecuación 2.1

Así, esta condición implica:

$$\hat{e}_p \times (I_1^x G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') \cdot \hat{e}_x + I_1^y G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') \cdot \hat{e}_y) + \hat{e}_p \times (G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \cdot \hat{e}_x) = 0 \quad (2.14)$$

Donde hemos tenido en cuenta la presencia de la carga fuente, en \vec{r}_0 .

Desarrollando esta última expresión, obtenemos:

$$-\sin(\varphi_1) \cdot I_1^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') + \cos(\varphi_1) \cdot I_1^y \cdot G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') = -\sin(\varphi_1) \cdot I_1^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \quad (2.15)$$

Correspondiéndose a la imposición de la ecuación 2.12 en un punto tangente 'i' del contorno del cilindro.

$$2) \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

Esta ecuación nos indica que la divergencia del vector potencial \vec{A} debe de nula, lo que nos anulará el segundo término del campo eléctrico en ese punto de la ecuación 2.1

En primer lugar, la expresión de la divergencia será:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (2.16)$$

Y como habíamos definido en la ecuación 2.12 que las componentes tangenciales se anulaban, solo nos quedará la componente normal, es decir:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) = 0 \quad (2.17)$$

Finalmente, desarrollando la derivada anterior, obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} = 0 \quad (2.18)$$

Siendo esta la condición que deberemos imponer en cada punto tangente del cilindro.

De esta forma, para un único punto tangente obtenemos la condición:

$$\cos(\varphi_1) \cdot C_{1,1}^x I_1^y + \sin(\varphi_i) C_{1,1}^y I_1^y = -\cos(\varphi_1) \cdot C_{1,0}^x \quad (2.19)$$

donde hemos definido las constantes:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \frac{G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \nabla G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \\ C_{i,k}^y &= \frac{G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \nabla G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \end{aligned} \quad (2.20)$$

Siendo la ecuación 2.19 el requisito que debe cumplir el punto tangente ‘i’ para satisfacer la segunda condición de contorno.

El proceso seguido equivale a ajustar la orientación y valor de un único dipolo imagen de carácter vectorial, al que hemos descompuesto en los ejes ‘x’ e ‘y’.

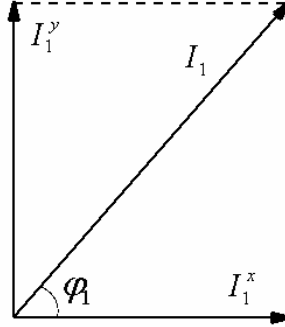


Figura 2.6 Descomposición de un dipolo I_1 en los dos ejes, con unos pesos determinados.

Este mismo procedimiento lo extenderemos ahora hasta un total de N puntos tangentes alrededor del contorno del cilindro, obteniendo un sistema de ecuaciones lineales (de dimensión $2N \times 2N$) a partir de las ecuaciones 2.15 y 2.19 cuya solución nos dará los pesos de los dipolos imagen, tanto para la coordenada ‘x’ como para la coordenada ‘y’.

Así, el sistema será:

$$\begin{aligned}
 & -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^x + \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^y = -\sin(\varphi_i) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \\
 & \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x I_k^x + \sin(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y I_k^y = -\cos(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x \\
 & i = 1, 2, 3 \dots N
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Estando definidas las constantes $C_{i,k}^x$ y $C_{i,k}^y$ por la ecuación 2.20. Ambas constantes pueden ser evaluadas para un medio general multicapa mediante el empleo de la transformada de Sommerfeld [9] (como veremos posteriormente), aunque para el espacio libre, ambas constantes coinciden a un valor dado.

Para obtener este valor, evaluaremos las partes en las que se compone la ecuación 2.20 a):

$$\frac{G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{1}{\rho} \tag{2.22}$$

Y b):

$$\hat{e}_\rho \cdot \nabla G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = \hat{e}_\rho \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \right] \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \tag{2.23}$$

en esta última ecuación, al estar definido el gradiente únicamente en la dirección \hat{e}_ρ , los elementos de las direcciones \hat{e}_θ y \hat{e}_φ se anulan, por lo que desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_\rho \cdot \nabla G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') &= \hat{e}_\rho \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot \hat{e}_r \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \hat{e}_\rho \cdot \left[\left(\frac{-jk_0 e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \cdot \hat{e}_r \right. \\
 &\quad \left. \frac{\mu_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi} \cdot \hat{e}_\rho \cdot \left[\left(\frac{-jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \cdot \hat{e}_r \right] = \frac{\mu_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi} \cdot \left(\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_r \cdot \left(\frac{-jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\mu_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi \cdot |\vec{r}-\vec{r}'|} \left(\left[\hat{e}_\rho \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right] \cdot \left(\frac{jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \right) \right] \right) \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Finalmente, uniendo los resultados parciales de las ecuaciones 2.22 y 2.24 obtenemos el valor para espacio libre de las constantes:

$$C_{i,k}^x = C_{i,k}^y = \frac{\mu_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi \cdot |\vec{r}-\vec{r}'|} \left(\frac{1}{\rho} - \left[\hat{e}_\rho \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right] \cdot \left(\frac{-jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \right) \quad (2.25)$$

De esta forma, ya tenemos todos los elementos para poder resolver la ecuación 2.21, de la que obtendremos el valor de los dipolos para poder recuperar el vector potencial en el interior de la cavidad cilíndrica, mediante:

$$\begin{aligned}
 G_{Acy}^{xx}(\vec{r}) &= G_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0') + \sum_{k=1}^N I_k^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \\
 G_{Acy}^{yx}(\vec{r}) &= \sum_{k=1}^N I_k^y \cdot G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Destacar que por la ecuación 2.26 se deduce que un dipolo orientado en la dirección 'x' va a producir una componente en la dirección 'y' del vector potencial magnético. Esta componente cruzada, viene proporcionada por los dipolos imágenes orientados a lo largo de la dirección 'y', como podemos observar en la figura 2.5, y físicamente, es causado por la curvatura circular de la pared del cilindro.

2.1.2 Resultados

Una vez completada la formulación espacial de la función de Green para fuentes eléctricas, vamos a comprobar los resultados que obtenemos mediante la misma.

Para ello, partiremos de una situación inicial compuesta por un cilindro de radio $r = a = \lambda$ (por lo que todas las unidades de los ejes representados son respecto a λ) y una frecuencia de 300 MHz.

El grado de cumplimiento de las condiciones de contorno y por tanto, de corrección del método, es casi siempre (excepto en algún caso particular, por ejemplo la fuente muy cercana a las paredes del cilindro) directamente proporcional al número de cargas/dipolos imágenes empleados, de tal forma que conforme aumentamos los mismos obtenemos mejores resultados. No obstante, como contrapartida, el coste computacional aumenta de forma considerable, así como los requerimientos de memoria al trabajar con matrices de valores complejos de elevadas prestaciones. Además, si se toman demasiadas condiciones de contorno, empleando para ello puntos discretos muy cercanos, se llegará a un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones formado, obteniendo soluciones incorrectas.

Trataremos por tanto, de emplear un valor mínimo de cargas/dipolos imágenes con el fin de optimizar los cálculos, obteniendo siempre unos resultados que sean concordantes con la realidad.

Representaremos el potencial escalar y vectorial para un número distinto de cargas/dipolos imágenes y en función de la posición de la fuente en el interior de la cavidad. Así podremos estudiar tanto la disposición de las cargas/dipolos imágenes alrededor del cilindro en función de la posición de la fuente, como los valores de los distintos potenciales (escalar y vectoriales).

La posición de la fuente la iremos variando sobre distintos puntos del primer cuadrante, con el fin de cubrir de la mejor manera posible el mismo. Concretamente, hemos empleado las siguientes posiciones para este estudio:

1. Posición $(0\lambda, 0\lambda)$
2. Posición $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$
3. Posición $(0.625\lambda, 0\lambda)$
4. Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Finalmente, realizaremos una pequeña comparación mostrando las características de cada caso respecto a los demás, para poder establecer un comportamiento lo más definido posible de los potenciales en el interior del cilindro.

1) Situación de la fuente: $(0, \lambda, 0, \lambda)$

En este primer caso, la situación que tenemos al emplear un total de 20 cargas/dipolos imágenes, es la siguiente:

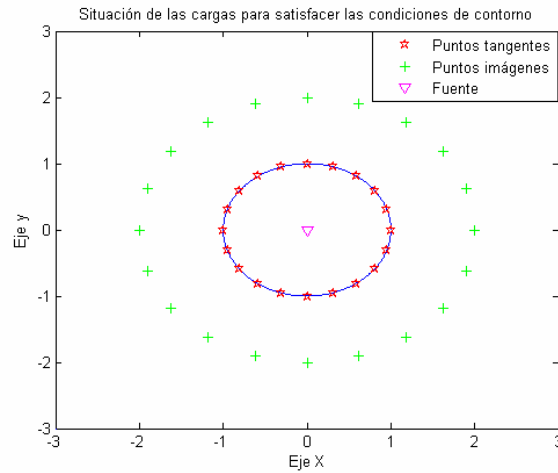


Figura 2.7 Representación cilindra con 20 cargas/dipolos imágenes

Observamos como la técnica de situar las cargas imágenes de forma simétrica respecto a un plano tangente ha propiciado que para el caso en el que la fuente se encuentra situada en el origen $(0,0)$ la distribución de las cargas imágenes sea circular, pero con un radio mayor al del cilindro (concretamente el doble, por la simetría respecto a los planos tangentes).

Para este mismo caso, vamos a representar el potencial escalar en el interior del cilindro:

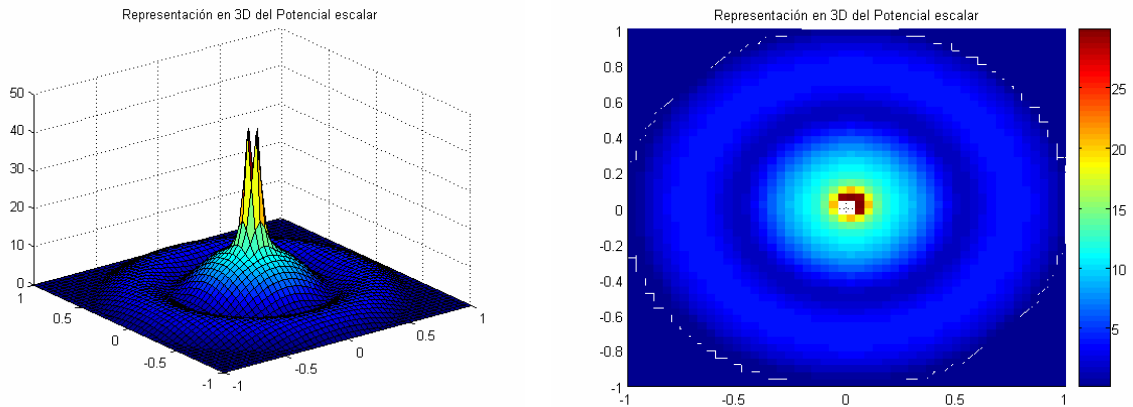


Figura 2.8 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0, \lambda, 0, \lambda)$ y 20 cargas imágenes

Comprobamos como para los bordes, se satisface la condición de contorno (es decir un valor nulo). Para verificar el grado de cumplimiento de estas condiciones representaremos el potencial escalar a lo largo del contorno del cilindro, en función del ángulo del mismo:

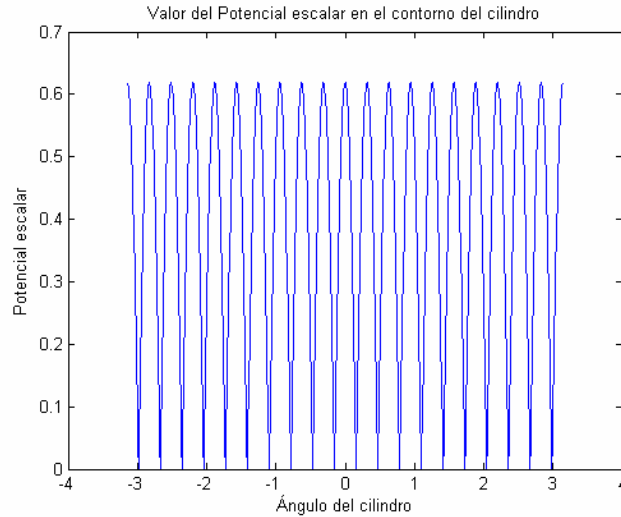


Figura 2.9 Potencial escalar en el contorno del cilindro. Fuente en $(0, \lambda, 0, \lambda)$ y 20 cargas imágenes

Comprobamos como obtenemos un total de 20 nulos a lo largo del cilindro, correspondientes a los 20 puntos tangentes en el contorno que habíamos impuesto. Para el resto de puntos de la pared del cilindro, obtenemos unos valores del potencial reducido. El método empleado será tanto más exacto cuanto menor sean estos valores, siendo totalmente ideal si todos ellos fueran cero. En el capítulo 3 mostraremos varias técnicas empleadas con el fin de reducir este error, obteniendo así una representación más fidedigna del potencial escalar en el interior del cilindro y reduciendo el coste computacional.

A continuación, mostraremos el potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro:

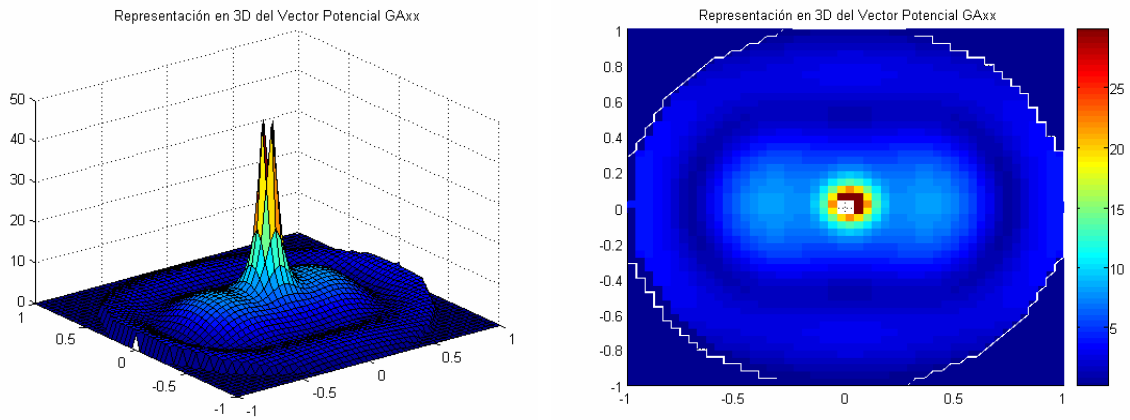


Figura 2.10 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Fuente en $(0, \lambda, 0, \lambda)$ y 20 dipolos imagen.

Comprobamos la orientación del potencial vector a lo largo del eje X, así como un mayor valor en la posición en la que se encuentra la carga.

Para esta situación, se produce una coincidencia de resultados entre los potenciales vectores G_A^{yx} y G_A^{xy} , mostrado en la figura 2.11:

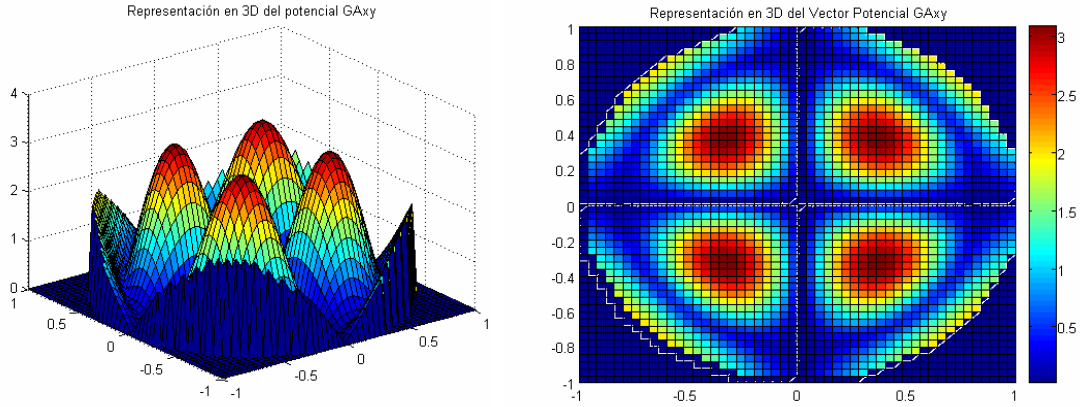


Figura 2.11 Representación potencial vector G_A^{xy} y G_A^{yx} . Fuente en $(0, \lambda, 0)$ y 20 dipolos imágenes.

Finalmente, representaremos el potencial vector en el eje ‘y’ al tener un dipolo orientado también en esa coordenada, es decir G_A^{yy} , resultado que, por simetría, es idéntico al G_A^{xx} pero orientado en el eje ‘y’:

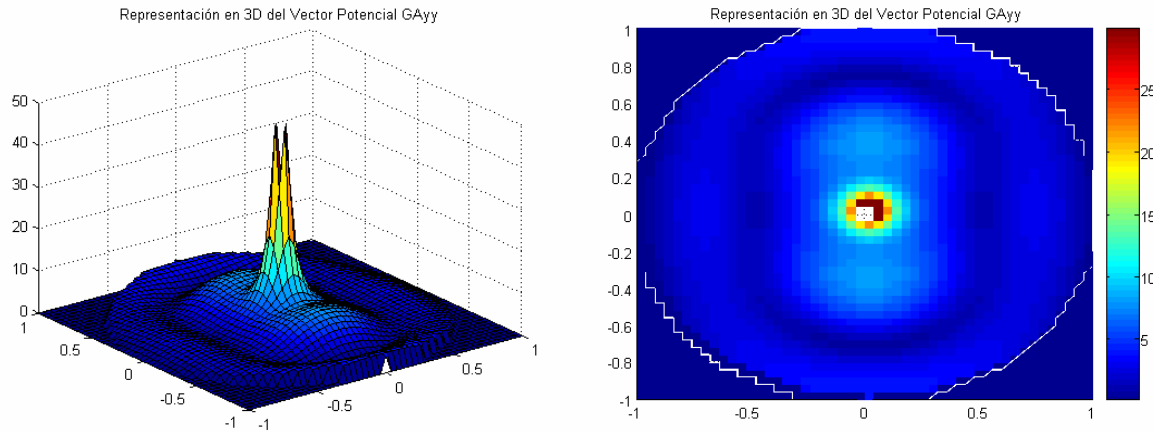


Figura 2.12 Representación potencial vector G_A^{yy} . Fuente en $(0, \lambda, 0)$ y 20 dipolos imágenes.

Hasta ahora, hemos empleado un total de 20 cargas/dipolos imágenes, no obstante podemos emplear un número diferente, con lo que obtendremos una representación que cumplirá mejor o peor las condiciones de contorno en función de que tenga un número mayor o menor de cargas/dipolos.

En general, las representaciones tenderán a converger, obteniéndose resultados válidos para un número de entre 15 y 20 cargas imágenes.

Un número relativamente pequeño de cargas imágenes, solo cumplirá las condiciones de contorno en puntos tangentes del cilindro muy alejados, por lo que los valores entre ellos pueden ser elevados, de forma que el potencial que estemos calculando no sea correcto.

Un ejemplo lo podemos obtener representando el potencial escalar en el contorno del cilindro para un total de 5 cargas imágenes:

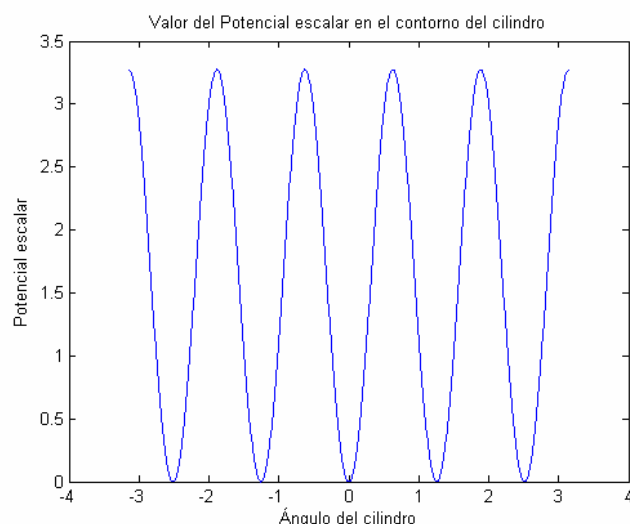


Figura 2.13 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en (0,0) y 5 cargas imágenes

En este caso observamos como hemos impuesto cinco valores nulos del potencial escalar en el contorno, pero en el resto de puntos de la pared el valor del potencial aumenta de forma considerable (valores muy elevados, de hasta 3.3), por lo que el potencial escalar obtenido con esta representación tendría un error muy importante. No obstante el coste computacional en este caso sería muy reducido, pudiéndose emplear para una primera aproximación.

Para un número elevado de cargas/dipolos, impondremos las condiciones de contorno en un gran número de posiciones, por lo que se “obliga” al resto de puntos a tener resultados parecidos, con el fin de poder satisfacer los requisitos impuestos a ambos lados de los mismos.

Por ejemplo, la figura 2.14 muestra el potencial escalar en el contorno del cilindro para un total de 30 cargas imágenes. Comprobamos como el valor máximo que alcanza es muy reducido (10^{-8}), en comparación con el de la figura 2.13

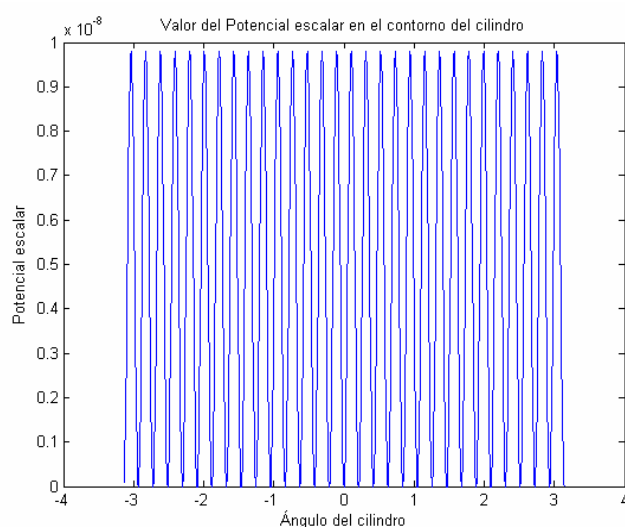


Figura 2.14 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en (0 λ , 0 λ) y 30 cargas imágenes

Finalmente, realizaremos una comparación del potencial escalar G_v y el potencial vector G_A^{xy} para los casos anteriores, es decir, 5 y 30 cargas imágenes.

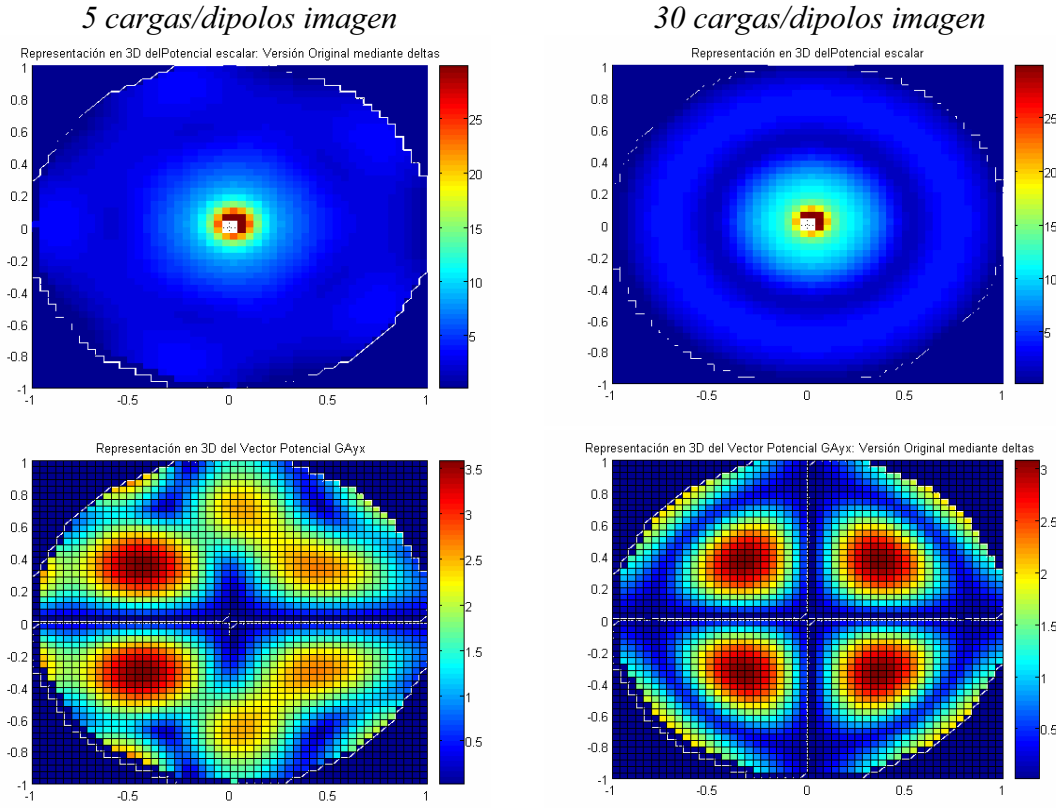


Figura 2.15 Comparación potencial escalar y vectorial G_A^{xy} . Fuente en $(0, 0, \lambda)$ y con 5 y 30 cargas/dipolos imagen

Comprobamos como para un número de 5 cargas/dipolos imagen no conseguimos una buena aproximación de los potenciales escalar y vectorial, introduciéndose un error importante. Por otro lado, el empleo de 30 cargas/dipolos imagen ha aumentado el coste computacional de los cálculos frente al de 20 cargas/dipolos. No obstante y a pesar del coste computacional conseguimos un resultado mucho más preciso, pues tanto las condiciones de contorno para el caso escalar como vectorial se cumplen de forma más correcta.

Para terminar con este caso, deberemos indicar que la situación de la fuente en la posición central $(0,0)$ del cilindro, ha provocado la simetría de todas las gráficas mostradas hasta ahora. Con una variación de la posición de la fuente eléctrica, esta simetría desaparecerá, obteniéndose resultados muy diferentes en función de la posición de la misma.

2) Situación de la fuente: $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$

En este caso, situaremos la fuente eléctrica en la posición $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$, lo que provocará en primer lugar, una variación de la situación de las 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad circular, como podemos observar en la figura 2.16:

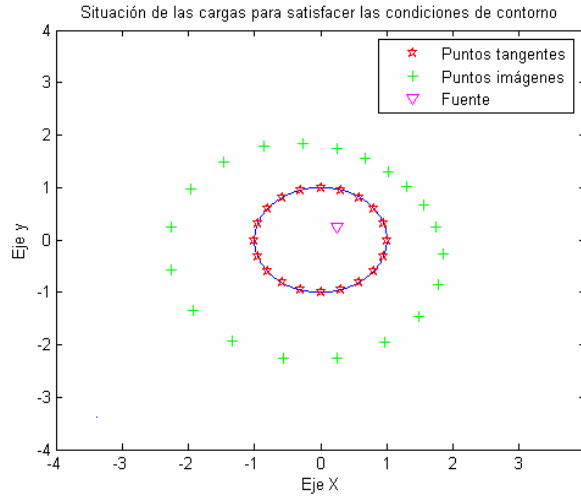


Figura 2.16 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en la posición $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$

Observamos como aquellos puntos tangentes al contorno de la cavidad que se encuentran más cercanos a la fuente eléctrica proporcionan una posición de las cargas/dipolos más cercanas y viceversa.

En este caso, obtenemos el siguiente potencial escalar:

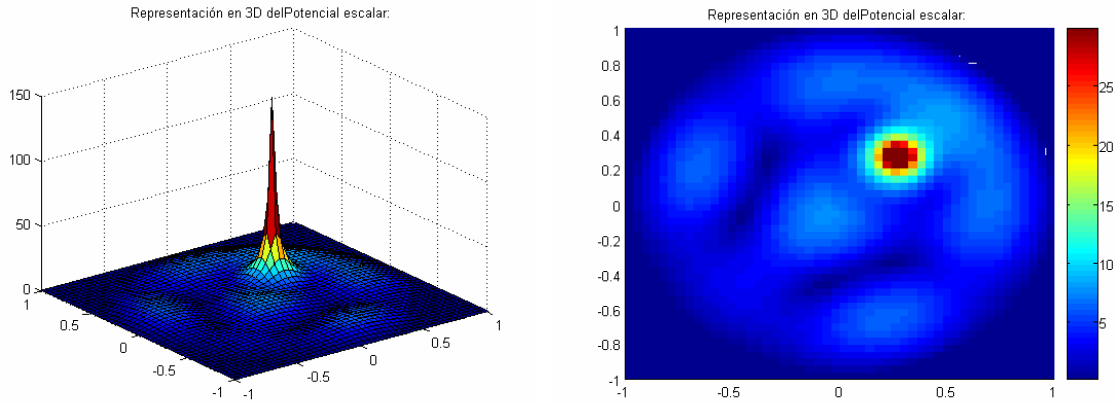


Figura 2.17 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$ y 20 cargas imágenes

Comprobamos como al variar la fuente de posición, hemos variado la distribución del potencial escalar, dejando ésta de ser simétrica, y apareciendo un máximo en las posiciones cercanas a la fuente (debido a la singularidad en la misma).

Debido a la cuadrícula empleada en la implementación numérica del algoritmo, si la fuente se sitúa en un punto de la misma, pueden aparecer valores muy elevados, debido a la influencia de la carga en ese punto (nuevamente, debido a la singularidad). En un caso general, cuando la posición exacta de la carga no coincide con un punto de la rejilla empleada, obtendremos una representación más visual (sin el máximo local). No obstante estos problemas se pueden evitar de forma sencilla, sin más que cambiar el paso con el que se define la cuadrícula.

Para el caso del Potencial escalar, el haber variado la posición de la fuente, también rompe con la estructura de la distribución del potencial en el contorno del cilindro, en el que, aunque aparecerán los 20 nulos impuestos por el sistema de ecuaciones, hará que el resto de puntos de la pared tenga una distribución muy variable, en función no lineal de su distancia a la fuente, como podemos observar en la figura 2.18.

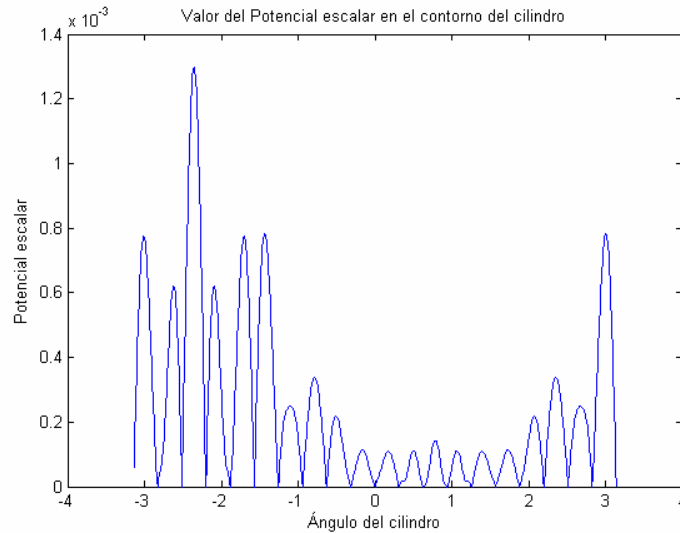


Figura 2.18 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$ y 30 cargas imágenes

Así vemos como en este caso, para el ángulo sobre el que se encuentra la fuente obtenemos un potencial menor, aumentando éste en la dirección opuesta a la fuente. Este comportamiento es particular, ya que de forma general suele producirse un aumento del valor del Potencial escalar conforme la carga se acerca a la pared del cilindro, como observaremos de forma detallada en un caso posterior.

A continuación, mostraremos el potencial vector G_A^{xx} para este caso en el interior del cilindro:

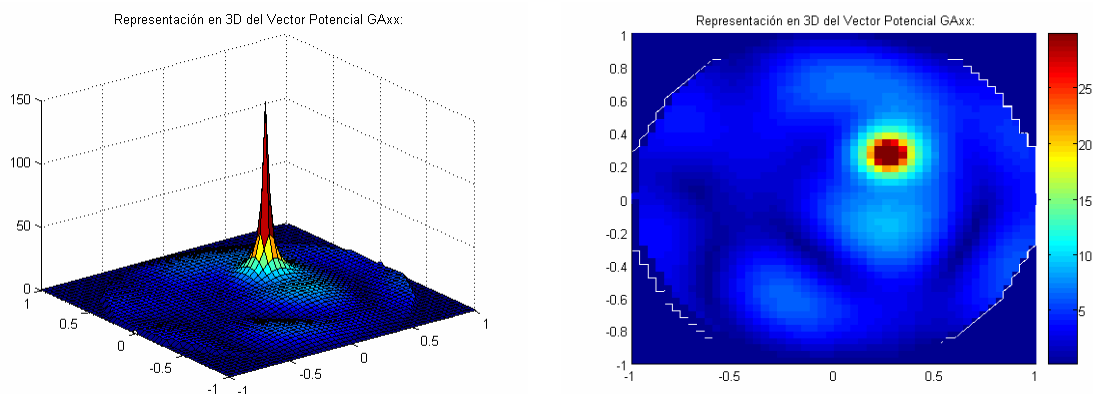


Figura 2.19 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Carga en $(0.25 \lambda, 0.25 \lambda)$ y 20 cargas imagen

Comprobamos como en este caso no se aprecia de una forma tan clara el efecto de la orientación de la fuente a lo largo del eje 'x' como en el caso anterior, obteniéndose además una distribución no simétrica.

Para esta situación, ya no se produce una coincidencia de resultados entre los potenciales vectores G_A^{yx} y G_A^{xy} , siendo lógica esta falta de equivalencia: un dipolo situado en la posición $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ a lo largo del eje 'x' no va a producir sobre el eje 'y' el mismo efecto que un dipolo orientado a lo largo del eje 'y' sobre el eje 'x', debido a la falta de simetría de su posición en la cavidad.

Mostraremos en las figuras 2.20 y 2.21 los potenciales vector G_A^{xy} y G_A^{yx} respectivamente:

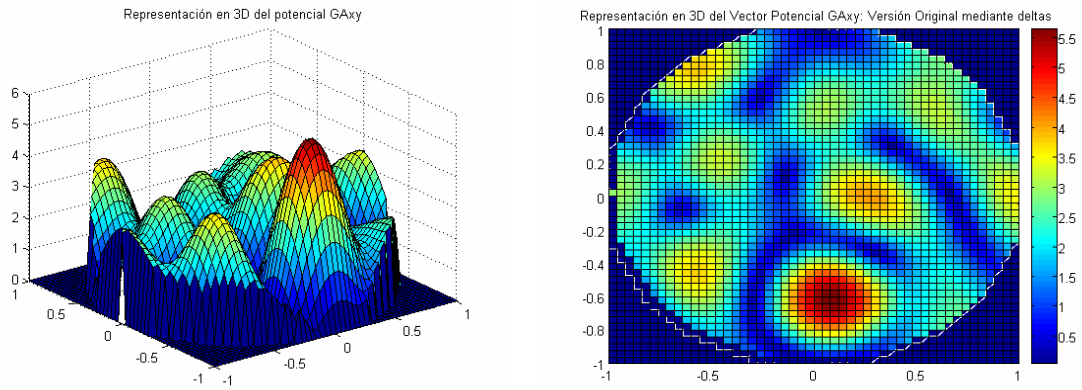


Figura 2.20 Representación potencial vector G_A^{xy} . Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

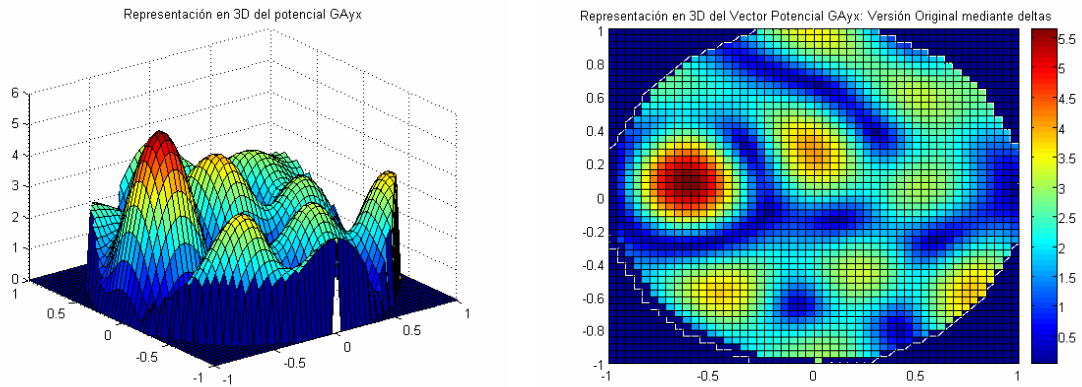


Figura 2.21 Representación potencial vector G_A^{yx} . Fuente en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

Finalmente, representaremos el potencial vector en el eje 'y' al tener un dipolo orientado también en esa coordenada, es decir G_A^{yy} . En este caso, al estar situada la fuente eléctrica en una posición distinta al origen de coordenadas, y al igual que en las otras representaciones de este caso, se rompe la simetría que teníamos en el apartado 1).

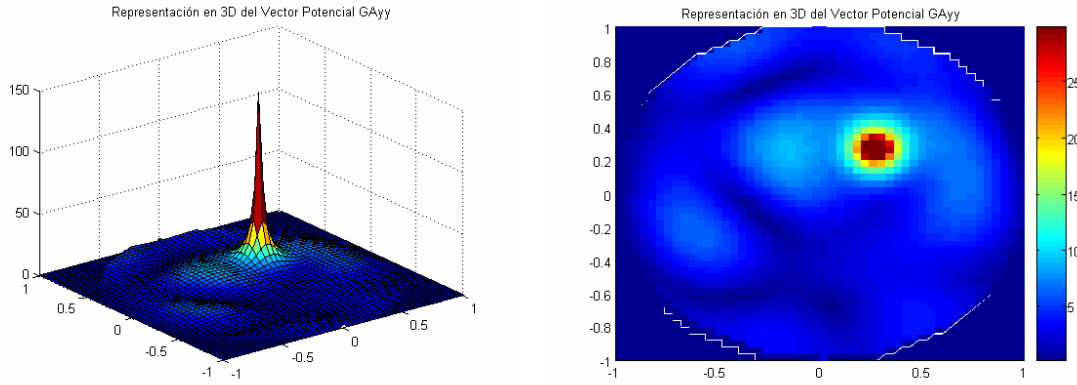


Figura 2.22 Representación potencial vector G_A^{yy} . Carga en $(0.25\lambda, 0.25\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

En cuanto a la variación del número de cargas/dipolos imagen para este caso, obtenemos un resultado similar al primer apartado, de tal forma que existe un compromiso entre corrección y coste computacional. Para esta posición de la fuente en el interior de la cavidad circular, con un número de entre 15 y 20 imágenes obtenemos resultados suficientemente válidos.

3) Situación de la fuente: $(0.625\lambda, 0\lambda)$

En este caso, situaremos la fuente eléctrica en la posición $(0.625\lambda, 0\lambda)$, lo que provocará en primer lugar, una variación de la situación de las 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad circular, como podemos observar en la figura 2.23:

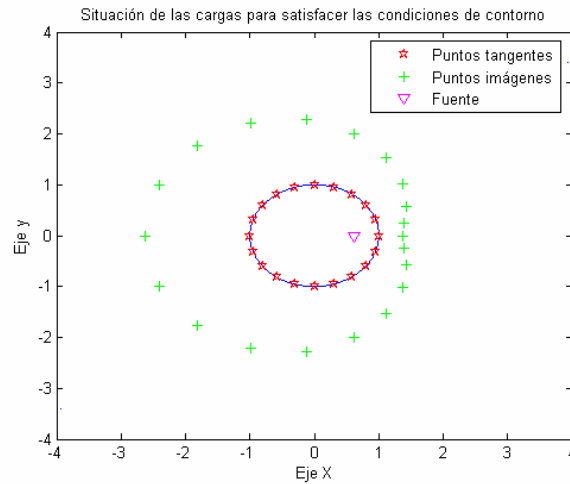


Figura 2.23 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en $(0.625,0)$

Comprobamos como al aumentar la distancia de separación entre la fuente y el centro del cilindro, la distribución de las cargas/dipolos imagen varía de forma considerable, teniendo un mayor efecto sobre la posición final de las imágenes la simetría de la carga fuente respecto al plano tangente, cuanto más cerca se encuentra ésta de las paredes del cilindro. Así, las posiciones imágenes situadas enfrente de la pared del cilindro que se encuentra más cerca de la fuente se acercan a la misma, para tratar de contrarrestar el efecto que esta cercanía pudiera tener sobre el potencial en el contorno del cilindro.

Para este caso, obtenemos el siguiente potencial escalar:

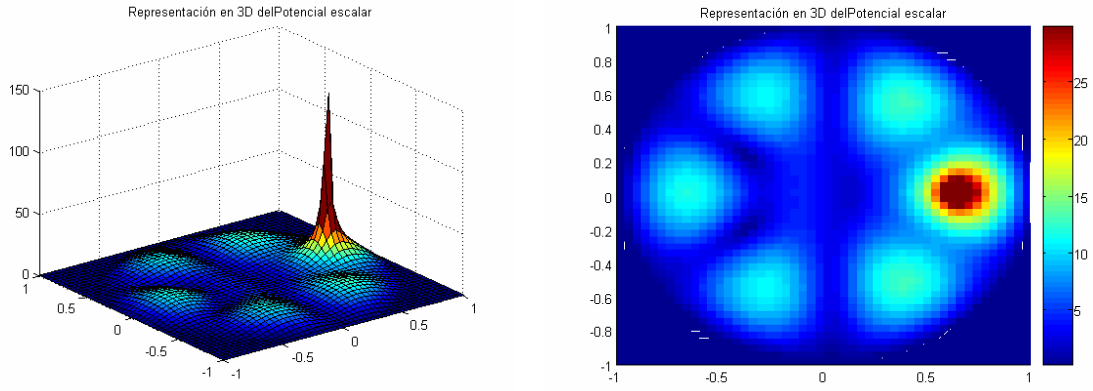


Figura 2.24 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 cargas imágenes

Representaremos el potencial escalar en el contorno del cilindro, observando que existe una simetría (la misma que podemos observar en la representación en 3D y 2D) respecto a $y=0$. Además, la aproximación de las cargas imágenes a las paredes del cilindro en las posiciones en las que se encuentra más cercana la fuente eléctrica, consigue disminuir el error en esos puntos, como observamos en la figura 2.25

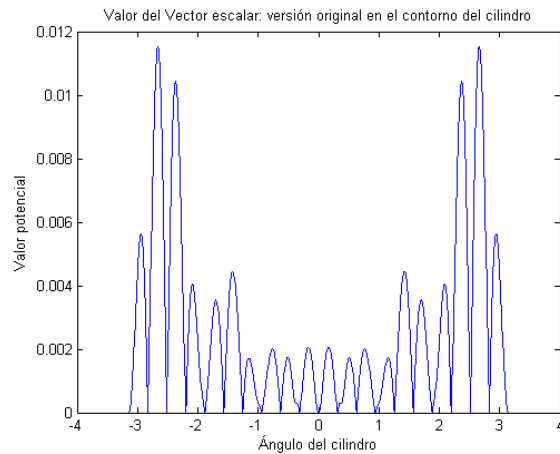


Figura 2.25 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 cargas imágenes

A continuación, mostraremos el potencial vector G_A^{xx} para este caso en el interior del cilindro:

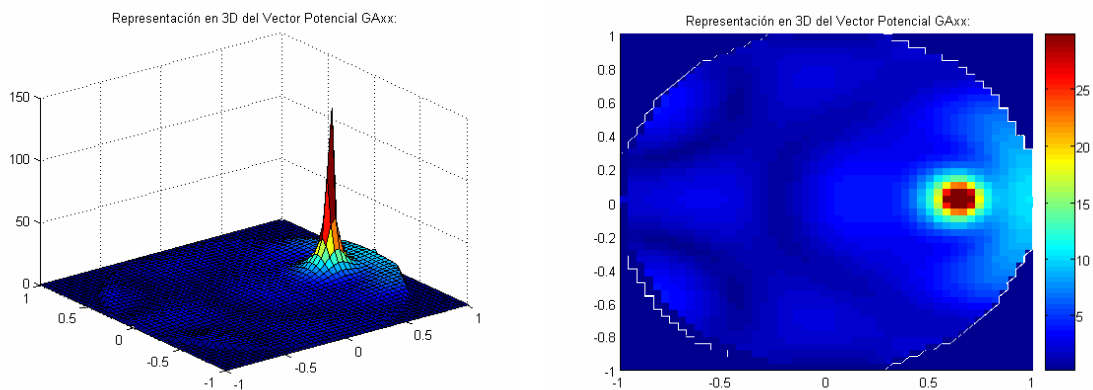


Figura 2.26 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Carga en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 cargas imagen

Comprobamos como se sigue manteniendo la simetría anterior alrededor del eje ‘x’, debido a la colocación de la fuente en él.

A continuación representaremos los Potenciales vectoriales G_A^{yx} y G_A^{xy} , que debido a la falta de simetría total no serán equivalentes, aunque si que mostrarán simetría de forma individual respecto al eje ‘x’, como el resto de Potenciales hallados para este caso.

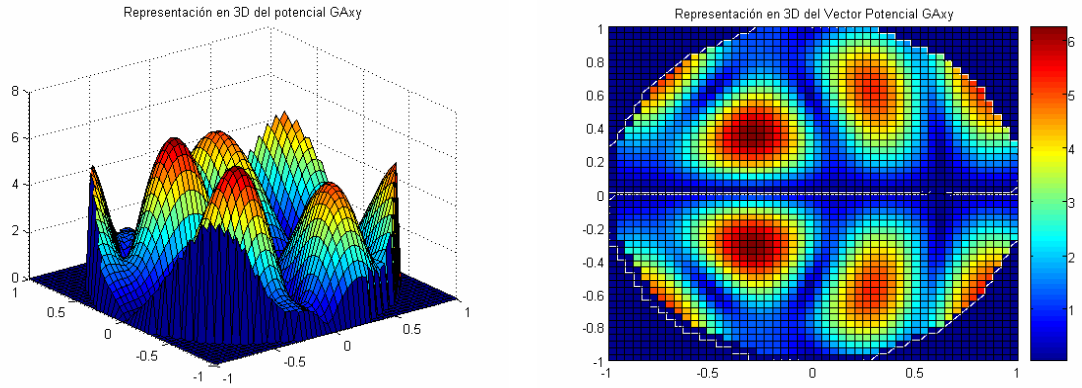


Figura 2.27 Representación potencial vector G_A^{yx} . Carga en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

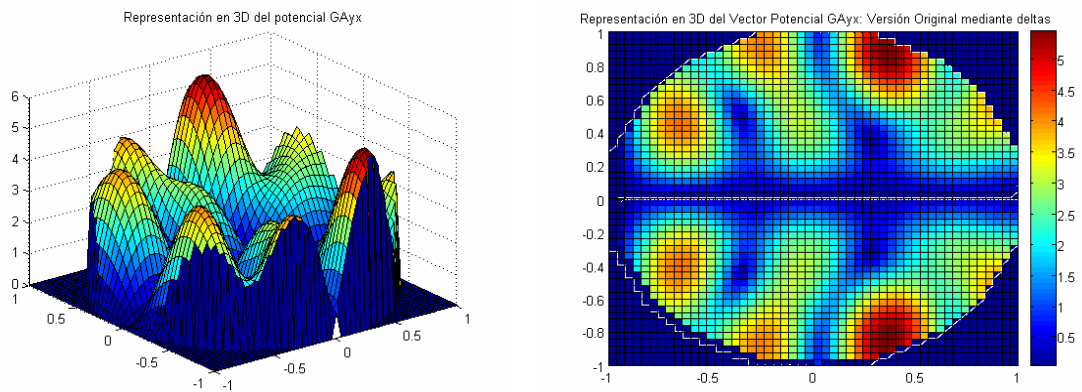


Figura 2.28 Representación potencial vector G_A^{xy} . Carga en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

Finalmente, representaremos el potencial vectorial G_A^{yy} , que, al igual que el resto de potenciales, presenta simetría respecto al eje ‘x’:

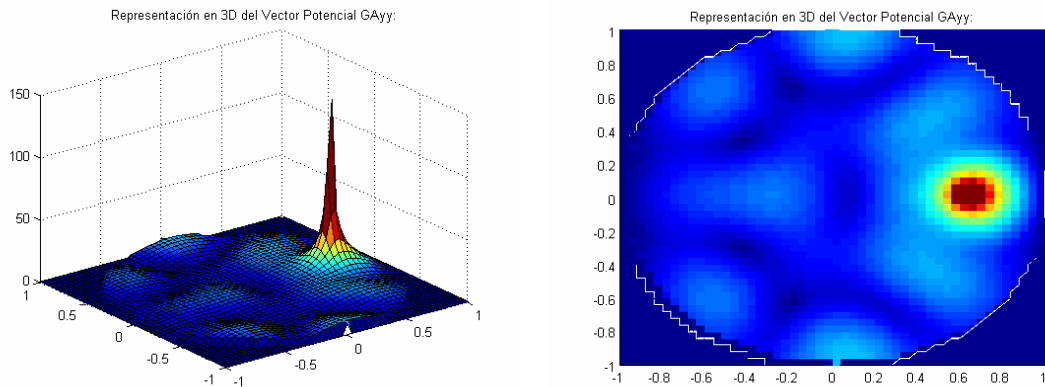


Figura 2.29 Representación potencial vector G_A^{yy} . Carga en $(0.625 \lambda, 0 \lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

Como en el resto de casos, un número de imágenes diferente hubiera variado la aproximación de los potenciales, aumentando su error y disminuyendo el coste computaciones (si disminuimos el número de imágenes) o aumentando la precisión y el coste computacional (aumentando el número de imágenes).

4) Situación de la fuente: (0.7,0.7)

En este caso, situaremos la fuente eléctrica en la posición (0.7, 0.7), situación que se encuentra muy próxima a la pared del cilindro. Esta proximidad provoca una distribución característica de las cargas/dipolos imágenes alrededor del cilindro, como podemos observar en la figura 2.30:

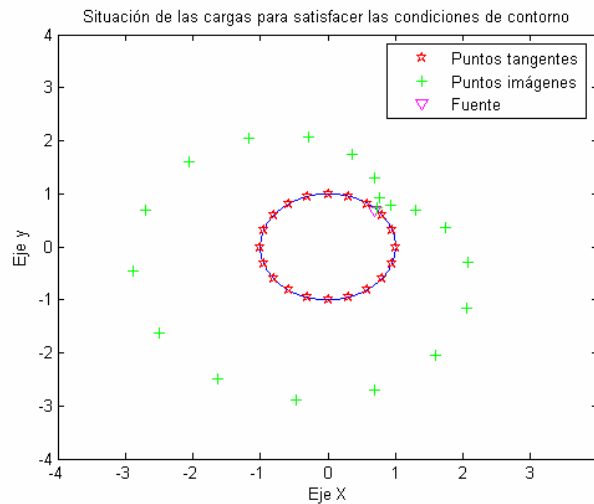


Figura 2.30 Situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en (0.7, 0.7)

Realizando un “zoom” a la zona donde está situada la carga fuente, podemos observar en detalle como las cargas imágenes se acercan a ésta (aquellas que están ligadas a puntos tangentes en el contorno muy cercanos a la fuente) o se alejan (para las imágenes ligadas a puntos tangentes más lejanos).

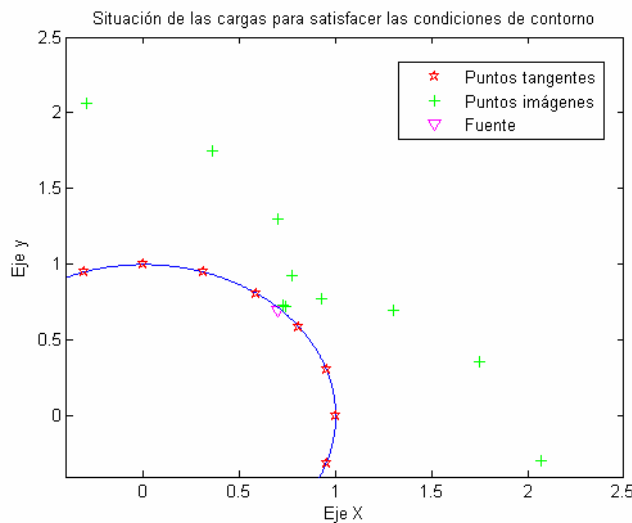


Figura 2.31 “Zoom” de la situación de 20 cargas/dipolos imagen alrededor de la cavidad con la fuente en $(0.7 \lambda, 0.7 \lambda)$

Además, debido a la cercanía de la fuente a las paredes del cilindro, existirán puntos del contorno donde será muy difícil que se cumplan de forma exacta las condiciones necesarias para obtener una buena aproximación de los potenciales. Concretamente, en aquellas zonas de la pared del cilindro muy cercanas a la fuente.

Así, obtenemos la siguiente representación del potencial escalar:

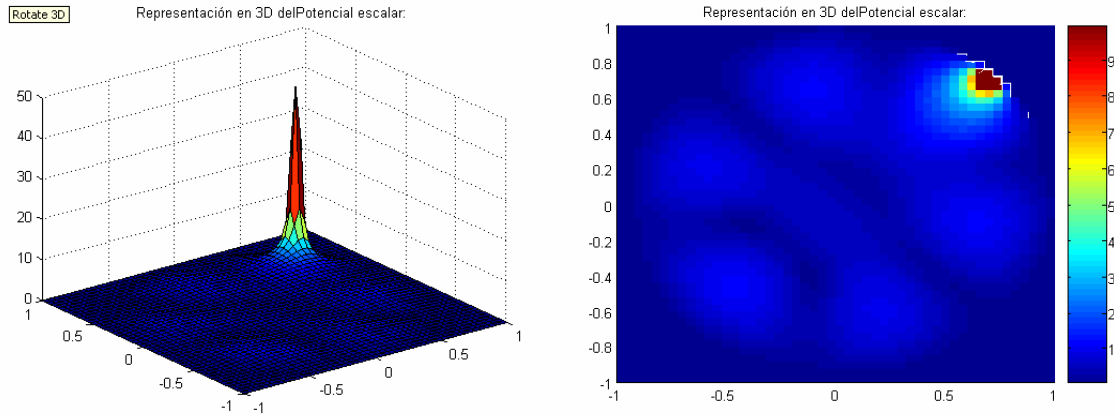


Figura 2.32 Potencial escalar en el interior del cilindro. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 cargas imágenes

Comprobamos como el potencial escalar se centra de forma casi exclusiva en la zona cercana a la pared, siendo el resto de valores casi nulo. Por esta cercanía, obtendremos un pico de potencial en el contorno del cilindro que corresponde a la posición de la fuente, pico que evita que el potencial escalar se anule a lo largo del contorno, como podemos observar en la figura 2.33.

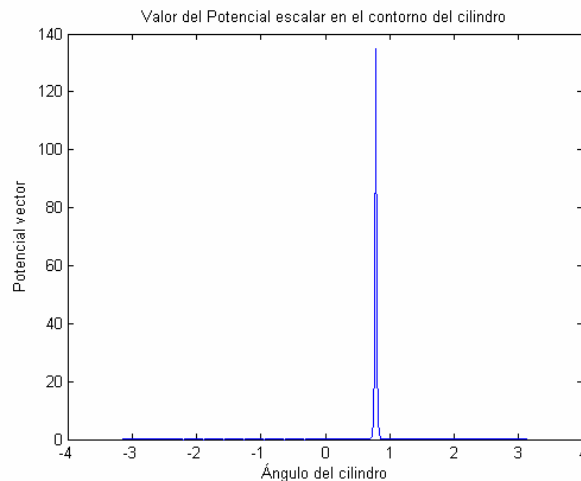


Figura 2.33 Representación del potencial escalar en el contorno. Fuente en $(0.7, 0.7)$ y 20 cargas/dipolos imágenes

La presencia de este pico de potencial, que evita que se cumplan las condiciones de contorno, es uno de los problemas que tiene esta aproximación: el error introducido cuando la fuente se encuentra cerca de las paredes. En el capítulo siguiente introduciremos varias técnicas con las que conseguiremos reducir de forma significativa este error.

A continuación, mostraremos el potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro:

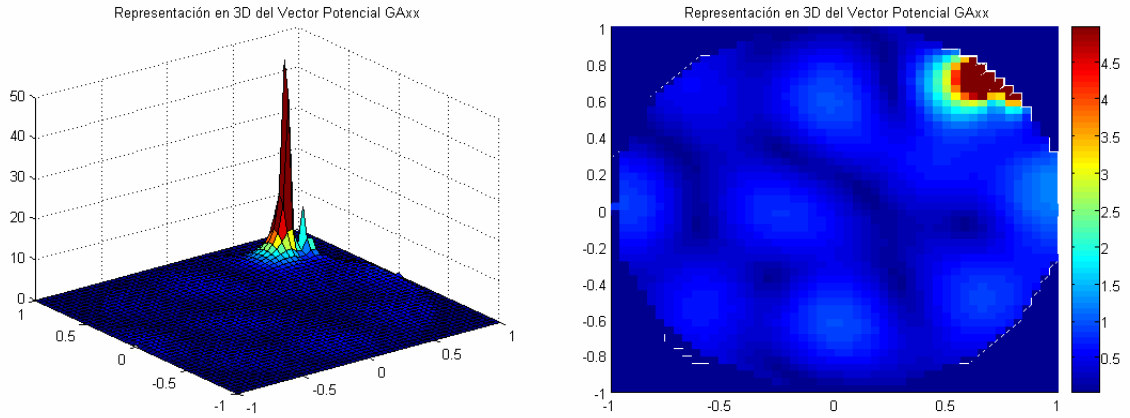


Figura 2.34 Potencial vector G_A^{xx} en el interior del cilindro. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 cargas imagen

Comprobamos como éste aparece únicamente en el borde del cilindro, en la situación donde se encuentra la fuente. Para el resto de posiciones del interior de la cavidad, el valor del potencial es nulo.

La falta de simetría de la ubicación de la fuente hace que los potenciales vectoriales G_A^{yx} y G_A^{xy} no coincidan, aunque en este caso obtenemos resultados parecidos, muy confinados en la cercanía de la posición de la fuente y limitados por la cercana presencia de la pared del cilindro.

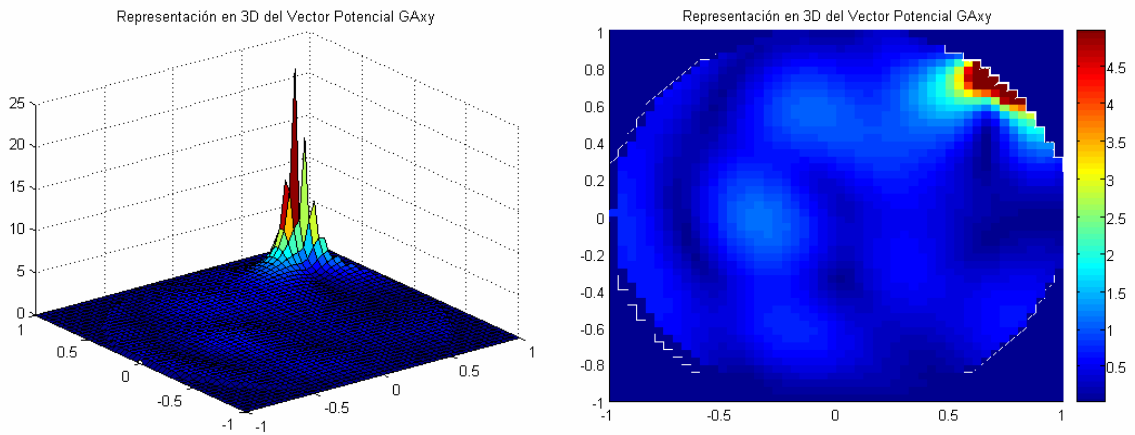


Figura 2.35 Representación potencial vector G_A^{xy} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

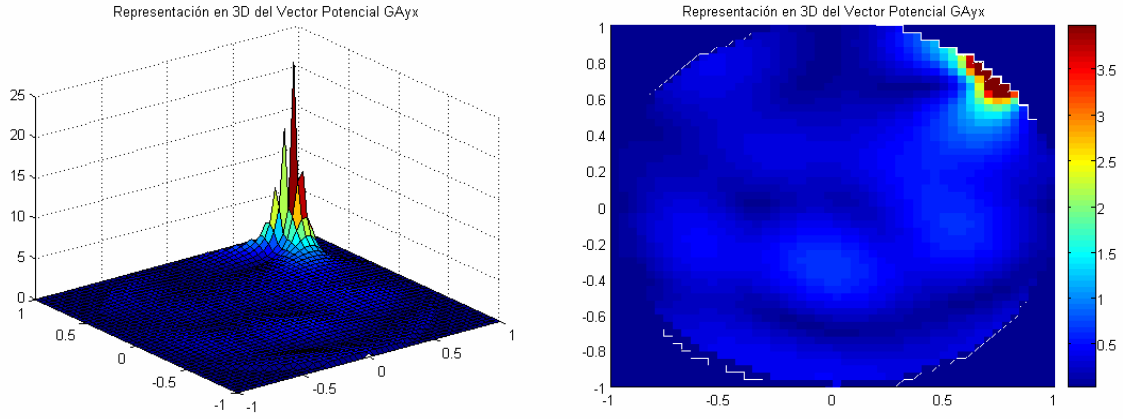


Figura 2.36 Representación potencial vector G_A^{yx} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

Finalmente, representaremos el potencial vectorial G_A^{yy} , que presenta unas características similares al resto de potenciales para este caso, centrándose de forma casi exclusiva en las posiciones cercanas a la fuente y la pared del cilindro.

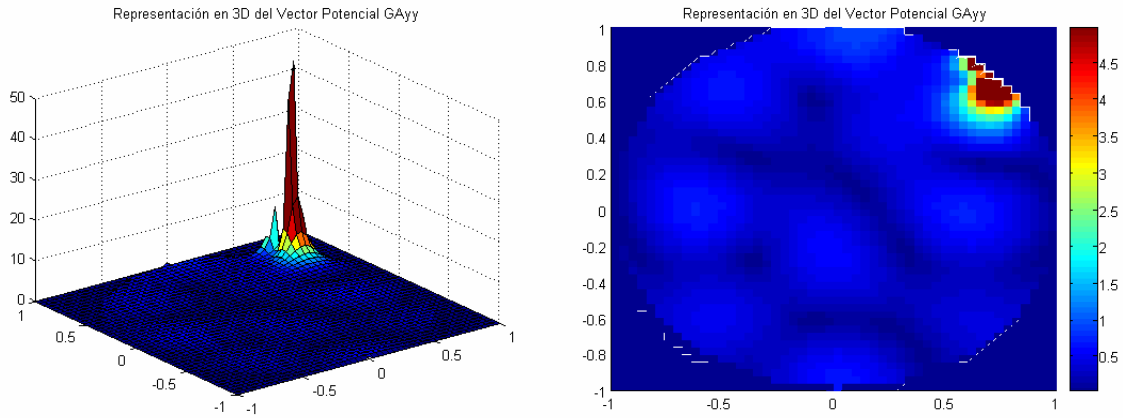


Figura 2.37 Representación potencial vector G_A^{yy} . Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ y 20 dipolos imágenes.

Por último comentar que para este tipo de casos en los que la fuente se encuentra muy cercana a las paredes del cilindro, un aumento del número de cargas/dipolos imagen no tiene porqué provocar un mejor cumplimiento de las condiciones de contorno. Es más, un mayor número de imágenes puede provocar que, a pesar de cumplirse los nulos en los puntos impuestos, el resto de puntos intermedios se vea sometido a unos valores de potencial muy elevados dejándose de cumplir por tanto las condiciones de contorno en esos puntos e introduciendo un mayor error en la aproximación de los potenciales obtenida.

5) Conclusiones

Finalmente, vamos a resaltar la influencia de la posición de la fuente en el interior del cilindro y del número de cargas/dipolos imágenes empleados para su cálculo.

Como hemos comprobado en los apartados anteriores, al situar la fuente en el centro aumenta la simetría de los potenciales calculados, así como la distribución de los mismos sobre el contorno del cilindro. Las condiciones de contorno se cumplen de forma exacta en los puntos impuestos, mientras que en el resto se producen oscilaciones controladas y periódicas (tanto para el caso escalar como para el caso vectorial).

Conforme separamos la fuente del centro del cilindro, se va rompiendo la simetría de los potenciales (aunque ésta se mantiene al situar la carga en el eje 'x' ó 'y'). La distribución de campos varía de forma sensible, en función de la posición de la fuente, así como el valor de los mismos en el contorno del cilindro.

Finalmente, al tener ubicada la fuente muy cerca de las paredes de la cavidad, el valor de todos los potenciales se concentra en esa región, siendo prácticamente nulo para el resto de casos. Por su parte, la distribución de los mismos alrededor del contorno muestra un elevado valor para las paredes cercanas a la fuente, siendo muy reducido para el resto de casos. Este valor elevado, este pico, provoca que en esa zona no se cumplan las condiciones de contorno, introduciendo un error en la aproximación de los potenciales que será tanto más elevado como mayor sea el pico.

De esta forma, tenemos caracterizado totalmente el potencial escalar y vectorial en el interior de un cilindro, con independencia de la posición de la fuente y mediante un número de cargas/dipolos imágenes (que será un compromiso entre precisión y coste computacional). El error introducido en la aproximación empleada será reducido mediante diversas técnicas que presentaremos en el capítulo siguiente, para obtener así unas representaciones de los potenciales más precisas.

2.2 Formulación espacial con fuentes magnéticas

2.2.1 Desarrollo de la formulación

En este caso, la formulación planteada parte de los mismos principios que para el caso de fuentes eléctricas, pero aparece una diferencia importante: las condiciones de contorno que se deben satisfacer en las paredes del cilindro son diferentes, pues las fuentes en este caso son magnéticas.

La distribución de las cargas/dipolos alrededor de la cavidad circular sigue exactamente la misma forma que en el caso anterior, definiéndose un número de puntos tangentes alrededor del contorno del cilindro con sus planos tangentes, y asignando a cada uno de estos puntos una carga/dipolo imagen simétrica respecto a la fuente y los planos tangentes.

En este caso, el campo magnético creado por la fuente será:

$$\vec{H} = -j\omega\vec{F} - \nabla\phi_m = -j\omega\vec{F} - j\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{F})}{\omega\mu_0\epsilon_0} \quad (2.27)$$

La condición de contorno que debe cumplir el campo magnético en el contorno del cilindro será el valor nulo de su componente normal, es decir:

$$\vec{H} \cdot \hat{e}_\rho = 0 \quad \text{en la pared del cilindro} \quad (2.28)$$

Siendo \hat{e}_ρ el vector unitario radial, en coordenadas cilíndricas, como podemos observar en la figura 2.38:

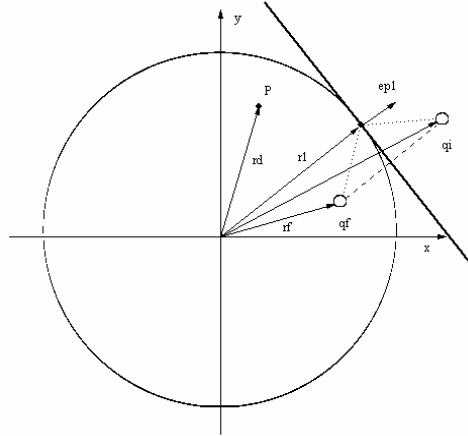


Figura 2.38 Situación una carga imagen respecto al cilindro

Para el caso del potencial escalar eléctrico, vamos a imponer que la componente normal de su gradiente sea nula en el contorno del cilindro, como muestra la ecuación 2.29:

$$(\nabla\phi_m) \cdot \hat{e}_\rho = 0 \quad \text{en la pared del cilindro} \quad (2.29)$$

En primer lugar, mostraremos como imponer la condición en un único punto tangente 'i' de la pared del cilindro (habiendo definido por teoría de imágenes una carga imagen, según explicamos en la teoría basada en fuentes eléctricas del apartado anterior), obteniendo:

$$q_1 \cdot \nabla G_w(\vec{r}_i, \vec{r}_1') \cdot \hat{e}_{p1} = -\nabla G_w(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \cdot \hat{e}_{p1} \quad (2.30)$$

De esta forma, el potencial escalar obtenido con esta técnica será:

$$G_{w_{cyc}}(\vec{r}) = G_v(\vec{r}, \vec{r}_o') + q_1 \cdot G_w(\vec{r}, \vec{r}_1') \quad (2.31)$$

Siendo $G_w(\vec{r}, \vec{r}')$ el potencial escalar magnético de una carga en condiciones de espacio libre:

$$G_w(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.32)$$

Al igual que ocurría para el caso de fuentes eléctricas, será necesario imponer las condiciones de contorno para el potencial escalar eléctrico en más de un punto de la pared del cilindro. Para ello, emplearemos la misma estrategia que hasta ahora, pero extendiéndolo a un total de N puntos tangentes en la pared del cilindro, de tal forma que exigiremos que se cumplan simultáneamente los requisitos en todos los puntos.

Así planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^N q_k \nabla G_w(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot \hat{e}_{pi} = -\nabla G_w(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \cdot \hat{e}_{pi} \quad (2.33)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

Comprobamos que en este caso tenemos una dificultad añadida, el cálculo del gradiente del potencial escalar eléctrico, $\nabla G_w(\vec{r}_i, \vec{r}_k')$, No obstante, para espacio libre podemos desarrollar este gradiente de una forma sencilla.

Si trabajamos con coordenadas cilíndricas, el gradiente será:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (2.34)$$

Y aplicándolo al potencial escalar magnético, tendremos:

$$\begin{aligned} \nabla G_w(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{e}_p &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \right] \cdot \left[\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \cdot \hat{e}_p = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r \cdot \left[\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \cdot \hat{e}_p = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'| \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] \cdot \hat{e}_r \cdot \hat{e}_p = \\ &= \frac{-1}{4\pi\mu_0} \left[jk_0|\vec{r}-\vec{r}'| \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \hat{e}_p = \\ &= \frac{-\hat{e}_p}{4\pi\mu_0} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \cdot (1 + jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|) \cdot \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{aligned} \quad (2.35)$$

De esta forma una vez resuelto el sistema de la ecuación 2.33 obtendremos el valor complejo de las cargas imágenes necesarias para poder satisfacer las condiciones de contorno en los N puntos tangentes del cilindro.

Finalmente, obtenemos el potencial escalar magnético en el interior de la cavidad mediante la ecuación 2.36:

$$G_{w_{cy}}(\vec{r}) = G_w(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k G_w(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (2.36)$$

Para la evaluación del potencial vector eléctrico de la función de Green diádica, realizamos un proceso similar, pero teniendo en cuenta la naturaleza de la magnitud computada. Supongamos para ello un dipolo orientado a lo largo del eje 'x', como podemos observar en la figura 2.39:

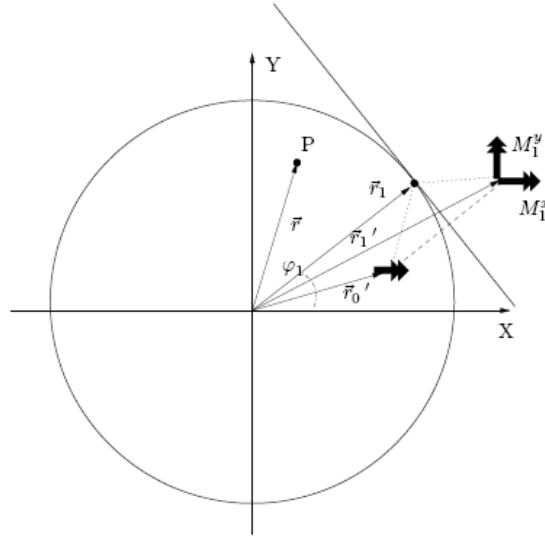


Figura 2.39 Dipolo fuente en el eje 'x' y sus dos dipolos imagen asociados a un punto tangente

Al igual que para el caso del potencial escalar, impondremos en primer lugar las condiciones de contorno a cumplir en un punto discreto 'i' de la pared del cilindro.

En este caso, partimos de la ecuación 2.28 que nos definía que la componente normal del campo magnético en la pared del cilindro debe de ser nula, lo que tras el análisis del campo magnético \vec{H} (definido en la ecuación 2.27) nos lleva a dos condiciones diferentes a imponer:

$$\hat{e}_p \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.37)$$

$$\hat{e}_p \cdot (\nabla \nabla \cdot \vec{F}) = 0 \quad (2.38)$$

Así, impondremos de forma conjunta sobre el punto tangente 'i' las dos condiciones definidas por las ecuaciones 2.37 y 2.38.

Para satisfacer estas condiciones, emplearemos al igual que en el caso de fuentes eléctricas dos dipolos ortogonales, uno orientado en el eje 'x' y el otro en el eje 'y', tal y como podemos observar en la figura 2.39

Cada uno de estos dipolos orientados tendrá un determinado valor, que deberemos obtener resolviendo el sistema impuesto en el punto tangente 'i'.

Analizando cada condición por separado:

$$1) \boxed{\hat{e}_p \cdot \vec{F} = 0}$$

Que nos indica que la componente normal del vector potencial \vec{F} debe ser nula, lo que nos anularía el primer término del campo eléctrico en ese punto de la ecuación 2.27.

Así, esta condición implica:

$$\hat{e}_p \cdot (M_1^x G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') \cdot \hat{e}_x + M_1^y G_F^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot \hat{e}_y) + \hat{e}_p \cdot (G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \cdot \hat{e}_x) = 0 \quad (2.39)$$

Donde hemos tenido en cuenta la presencia de la carga fuente, en \vec{r}_0 .

Desarrollando esta última expresión, obtenemos:

$$\cos(\varphi_1) \cdot M_1^x \cdot G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') + \sin(\varphi_1) \cdot M_1^y \cdot G_F^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_1') = -\cos(\varphi_1) \cdot M_1^x \cdot G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \quad (2.40)$$

Correspondiéndose a la imposición de la ecuación 2.37 en un punto tangente 'i' del contorno del cilindro.

$$2) \boxed{\hat{e}_p \cdot (\nabla \nabla \cdot \vec{F}) = 0}$$

Esta ecuación nos indica que la componente normal del gradiente de la divergencia del vector potencial \vec{F} debe de ser nula, lo que nos anulará el segundo término en ese punto de la ecuación 2.27.

Vamos a simplificar la ecuación 2.38 de forma que sea más directa su aplicación a los puntos tangentes de la cavidad, trabajando para ello en coordenadas cilíndricas.

En primer lugar, la divergencia de \vec{F} será:

$$\nabla \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.41)$$

Por lo que el gradiente de la divergencia será:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \\ &\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \hat{z} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Y multiplicando por el vector normal \hat{e}_p e igualando a cero, tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{e}_p \cdot (\nabla \nabla \vec{F}) &= \hat{e}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \cdot \hat{e}_p = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] = \frac{-1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Posteriormente, aplicamos la condición impuesta por la ecuación 2.37, es decir, que la componente normal del vector \vec{F} es nula, con lo que obtendremos:

$$\hat{e}_p \cdot (\nabla \nabla \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} F_\varphi \right) \right) = 0 \quad (2.44)$$

Entonces si imponemos la condición:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} F_\varphi \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} - \frac{F_\varphi}{\rho^2} = 0 \quad (2.45)$$

Siempre estaremos cumpliendo la ecuación 2.38, habiendo simplificado la misma de forma considerable y siendo esta la condición que deberemos de imponer en cada punto tangente del cilindro.

Finalmente, proyectando sobre los ejes tendremos la condición sobre un único punto tangente:

$$-\sin(\varphi_1) \cdot C_{1,1}^x M_1^x + \cos(\varphi_1) C_{1,1}^y M_1^y = \sin(\varphi_1) \cdot C_{1,0}^x \quad (2.46)$$

donde hemos definido las constantes:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \hat{e}_p \cdot \nabla G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') - \frac{G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} \\ C_{i,k}^y &= \hat{e}_p \cdot \nabla G_F^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') - \frac{G_F^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} \end{aligned} \quad (2.47)$$

El proceso seguido equivale a ajustar la orientación y valor de un único dipolo imagen, al que hemos descompuesto en los ejes 'x' e 'y', tal y como mostramos en la figura 2.6.

Este mismo procedimiento lo extenderemos ahora hasta un total de N puntos tangentes alrededor del contorno del cilindro, obteniendo un sistema de ecuaciones lineales (de dimensión $2N \times 2N$) a partir de las ecuaciones 2.40 y 2.46 cuya solución nos dará los valores de los dipolos imagen, tanto para la coordenada 'x' como para la coordenada 'y'.

Así, el sistema será:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot M_k^x + \sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_F^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot M_k^y &= -\cos(\varphi_i) \cdot G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \\ -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x M_k^x + \cos(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y M_k^y &= \sin(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x \end{aligned} \quad (2.48)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

Estando definidas las constantes $C_{i,k}^x$ y $C_{i,k}^y$ por la ecuación 2.47. Ambas constantes pueden ser evaluadas para un medio general multicapa mediante el empleo de la transformada de Sommerfeld [9], aunque para el espacio libre, ambas constantes coinciden a un valor dado.

Para obtener este valor, evaluaremos las partes en las que se compone la ecuación 2.47a):

$$\frac{G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (2.49)$$

Y b):

$$\hat{e}_p \cdot \nabla G_F^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = \frac{-\varepsilon_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi \cdot |\vec{r}-\vec{r}'|} \left(\left[\hat{e}_p \cdot (\vec{r}-\vec{r}') \right] \cdot \left(\frac{jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) \right) \quad (2.50)$$

Donde esta última ecuación presenta un desarrollo totalmente análogo a la ecuación 2.23, por lo que se ha omitido.

Finalmente, uniendo los resultados parciales de las ecuaciones 2.49 y 2.50 obtenemos el valor para espacio libre de las constantes:

$$C_{i,k}^x = C_{i,k}^y = \frac{\epsilon_0 \cdot e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi \cdot |\vec{r}-\vec{r}'|} \left(-[\hat{e}_\rho \cdot (\vec{r}-\vec{r}')] \cdot \left(\frac{jk_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) - \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.51)$$

De esta forma, ya tenemos todos los elementos para poder resolver la ecuación 2.48, de la que obtendremos el valor de los dipolos para poder recuperar el vector potencial eléctrico en el interior de la cavidad cilíndrica, mediante:

$$G_{Fcy}^{xx}(\vec{r}) = G_F^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0') + \sum_{k=1}^N M_k^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \quad (2.52)$$

$$G_{Fcy}^{yx}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N M_k^y \cdot G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')$$

Destacar que por la ecuación 2.52 se deduce que un dipolo orientado en la dirección 'x' va a producir una componente en la dirección 'y' del vector potencial eléctrico. Esta componente cruzada, viene proporcionada por los dipolos imágenes orientados a lo largo de la dirección 'y', como podemos observar en la figura 2.39, y físicamente, es causado por la curvatura circular de la pared del cilindro.

2.2.2 Resultados

Al partir de una formulación similar a la del caso eléctrico (cambiando las fuentes por magnéticas) y al haber variado únicamente las condiciones de contorno, las aproximaciones de los potenciales tanto escalar como vectorial serán correctas aunque introducirán un error que variará en función del número de cargas/dipolos imágenes empleados y de la situación de la carga fuente en el interior del cilindro.

En este trabajo nos centraremos en la formulación bajo fuentes eléctricas, no obstante la validez de esta formulación bajo fuentes magnéticas ha quedado contrastada en [6], obteniéndose resultados satisfactorios y una convergencia rápida para un número de entre 15 y 20 cargas/dipolos tangentes. Algunos de los resultados obtenidos en [6] para una frecuencia de 300Mhz y una posición de la fuente de (0.5λ,0) son:

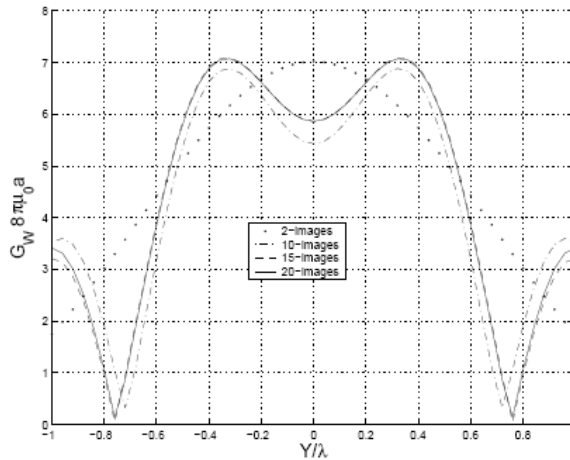


Figura 2.40 Potencial escalar magnético normalizado en el eje x=0

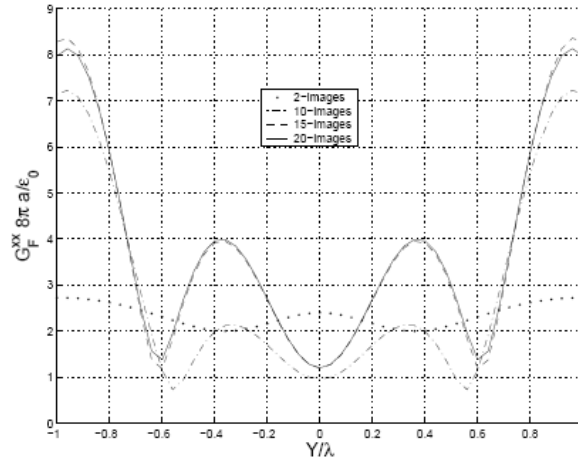


Figura 2.41 Potencial vector eléctrico G_F^{xx} normalizado en el eje $x=0$

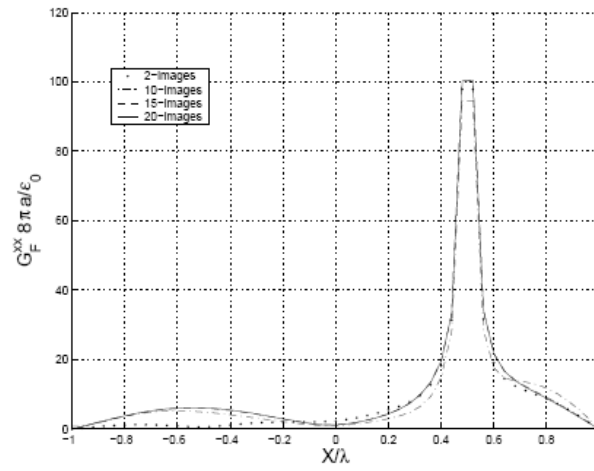


Figura 2.42 Potencial vector eléctrico G_F^{xx} normalizado en el eje $y=0$

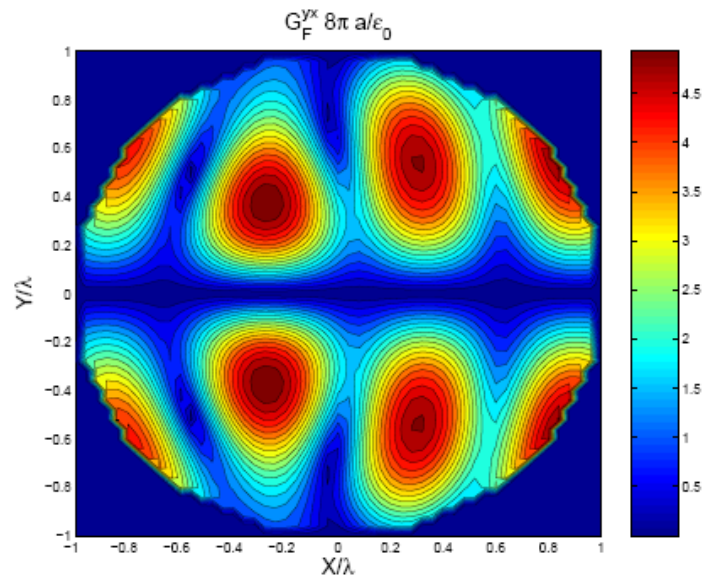


Figura 2.43 Potencial vector eléctrico G_F^{yx} normalizado evaluado con 20 imágenes

2.3 Software desarrollado

En el desarrollo del software, en lenguaje Fortran 90 [12] (elegido por las razones que expusimos anteriormente), partimos de un programa anterior, que realizaba los cálculos principales.

Concretamente, a partir de los datos iniciales que se pasan al programa mediante un fichero texto (como puede ser la frecuencia, número de puntos de la rejilla, número de cargas/dipolos imagen, posición de la carga fuente, radio del cilindro, etc) se encarga de situar las imágenes alrededor de la cavidad y calcular el valor de las mismas, tanto para el caso del potencial escalar como para el potencial vectorial. Finalmente, grabará en disco el valor complejo de los potenciales calculados.

En esta primera aproximación, incluiremos además el cálculo del potencial escalar sobre la superficie del cilindro y realizaremos los programas Matlab[13] que nos representen tanto la situación del cilindro y las cargas como los distintos potenciales (escalar y vectorial) en 3D y los cortes sobre los ejes fundamentales.

Debido a la extensión del programa, no vamos a mostrarlo de forma completa, sino que indicaremos cuales son los ficheros de que se compone, como toman los datos iniciales y como facilita los resultados, además de indicar la forma de visualizar los mismos mediante el código en Matlab.

2.3.1 Introducción de los datos

En primer lugar, deberemos introducir los datos iniciales al programa, que serán:

- Frecuencia: a la que realizaremos el estudio de la cavidad. Por ejemplo, una frecuencia de 300Mhz.
- Radio del cilindro, que definirá la cavidad a analizar.
- Número de imágenes, que nos indicará el número de cargas/dipolos que impondremos alrededor del cilindro para satisfacer las condiciones de contorno.
- Posición de la fuente en la cavidad, que estará compuesta por la posición en el eje 'z', 'x' e 'y'.
- Número de puntos de la rejilla, que se refiere al número de puntos en el eje 'x' e 'y' con el que haremos una cuadrícula que englobe al cilindro, para poder calcular los potenciales en su interior y poder realizar una representación en 3D de los mismos.

Todos estos valores deben estar contenidos en un fichero denominado "Datos.in", que debe estar ubicado en el mismo directorio que el programa en Fortran principal.

A continuación mostraremos un ejemplo de este fichero, que aclarará su formato y facilitará posibles modificaciones del mismo:

```
! Datos de entrada del programa Potcil
! Frecuencia
3.0D8
! Radio del cilindro:
1.0D0
! Número de cargas/dipolos imagen.
15
! Posición de la fuente en el cilindro (x,y,z):
0.0D0 0.0D0 0.0D0
! Número de puntos de la rejilla (x,y)
51 51
```

2.3.2 Programa en Fortran 90

El código del programa en Fortran 90 está dividido en varios ficheros, para facilitar su modularidad y mantenimiento. Además, todos los ficheros han sido debidamente comentados para aclarar su funcionamiento en caso necesario.

En cuanto a su ejecución, esta se podrá realizar tanto en un sistema Windows (con cualquier compilador de Fortran) como en un sistema Linux, incluyendo un fichero “Makefile” que facilita su compilación, como explicaremos en detalle posteriormente.

2.3.2.1 Código empleado

Mostraremos los distintos ficheros que se han empleado en el desarrollo del código, indicando su funcionalidad:

- *ludcmp.f90*
Esta rutina se emplea para realizar la factorización LU de una matriz de números complejos, tal y como se detalla en [12].
- *lubksb.f90*
Esta rutina se emplea para realizar la sustitución hacia atrás de una matriz de coeficientes complejos, que ha sido factorizada en su forma LU previamente, mediante la rutina *ludcmp.f90*, como se explica en [12]. Lo emplearemos para poder resolver sistemas de ecuaciones lineales complejas.
- *nrtype.f90*
Es un módulo que se encarga de definir algunas constantes y parámetros usados de forma habitual en el cálculo numérico.
- *nrutil.f90*
Es un módulo que define una gran cantidad de subrutinas numéricas empleadas de forma frecuente, y que han sido definidas en [12].
- *constlr.90*
Este módulo se encarga de la definición de algunas constantes físicas que emplearemos a lo largo del programa principal, como por ejemplo el número π , la permitividad del vacío, etc.

○ *pgeomegometry.f90*

Este módulo define el nombre de variables, para que sean usadas en varios programas con el mismo nombre, facilitando así la portabilidad entre ellos. Por ejemplo, para la frecuencia ('freq'), el número de onda ('k0'), etc.

○ *pescalarf_contorno.F90*

Esta subrutina se encarga de la situación de N puntos tangentes alrededor del cilindro, ubicar las cargas imágenes alrededor de los mismos, y calcular el valor complejo de las cargas para que se satisfagan las condiciones de contorno en esos N puntos. Para ello, implementa la teoría del potencial escalar bajo fuentes eléctricas que ha sido desarrollada en el punto 2.1

Recibirá toda la información de entrada necesaria (como el número de puntos tangentes, el radio del cilindro, ubicación de la carga fuente, etc) y devolverá el potencial escalar calculado, tanto en todo el interior del cilindro como en el contorno del mismo (pudiéndose así verificar si se cumplen o no las condiciones de contorno).

Por último, también grabará para su posterior representación la situación de las cargas imágenes, puntos tangentes en el cilindro y la fuente, en el subdirectorío "resultados".

○ *pvectorf.F90*

Esta subrutina se encarga de la situación de N puntos tangentes alrededor del cilindro, ubicar los dipolos imágenes alrededor de los mismos, y calcular el valor complejo de los dipolos para que se satisfagan las condiciones de contorno en esos N puntos. Para ello, implementa la teoría del potencial vectorial magnético bajo fuentes eléctricas que ha sido desarrollada en el punto 2.1 Este cálculo se realizará bajo dos suposiciones: que el dipolo fuente se encuentra en su ubicación orientado respecto al eje 'x' y respecto al eje 'y', pudiendo así obtener todos los potenciales vectoriales.

○ *Potril.F90*

Se trata del programa principal, que se encargará de extraer los parámetros de análisis del fichero "Datos.in" e ir llamando a las distintas funciones para calcular todos los potenciales (escalar y vectorial). Finalmente, grabará en el subdirectorío "resultados" los valores obtenidos para todos los cálculos.

2.3.2.2. Compilación y ejecución

El correcto funcionamiento del programa ha sido comprobado para el sistema operativo Windows (con el compilador Intel Fortran 9.0) como para sistemas Linux (con el mismo compilador).

Es importante que el fichero de entrada "Datos.in" se encuentre en el mismo directorio que los programas Fortran, así como la existencia en ese directorio de un subdirectorío "resultados" en el que se grabarán todos los ficheros de salida.

En el caso de estar bajo un entorno Windows, la forma más sencilla de ejecutar el programa es incluir todos los ficheros en un nuevo "proyecto", en cualquiera de los entornos visuales Fortran existentes (por ejemplo Intel Visual Fortran, Compaq Visual Fortran, etc). El entorno reconocerá el programa Principal (Potcil.F90) y permitirá su ejecución.

En el caso de estar bajo un entorno Linux, se ha creado un fichero “Makefile” que llamará al compilador de Fortran instalado en el sistema, compilando de forma automática todos los ficheros. La ejecución del programa será como en el resto de programas en Linux, mediante “./Potcil”.

2.3.3. Programa en Matlab©

Una vez que ha sido ejecutado el programa “Potcil”, se habrán guardado el cálculo de todos los potenciales en el subdirectorio “resultados”, en fichero de texto planos.

Mediante el entorno Matlab [13], vamos a leer la información contenida en dichos ficheros, con el fin de poder visualizar todo el contenido, en un total de 12 figuras: situación en la que nos encontramos (cilindro, posiciones de las cargas, posiciones de los puntos tangentes en la cavidad, etc), representación del potencial escalar (en 3D, a lo largo del contorno del cilindro y el corte con los ejes) y del potencial vectorial (concretamente, representaremos los potenciales $G_A^{xx}, G_A^{yx}, G_A^{xy}$ y G_A^{yy} tanto en 3D como los cortes con los ejes de esas representaciones).

2.3.3.1 Código empleado

Hemos empleado dos ficheros script de Matlab, para poder mostrar gráficamente los resultados:

- *representa_situacion.m*
Es una función que se encarga de coger toda la información de la ubicación de las imágenes, los puntos tangentes del cilindro, la posición de la fuente, y la forma del cilindro, para poder visualizar la situación que estamos analizando.
- *inicio.m*
Es el programa principal, que además de llamar a la función para representar la situación en la que nos encontramos, se encarga de extraer de los ficheros toda la información de los potenciales y visualizarlos de forma gráfica, en 3D y mostrando el corte con los ejes de todos los potenciales. Para el caso del potencial escalar, se incluye además el potencial obtenido a lo largo del contorno del cilindro.

2.3.3.2 Ejecución

Los dos scripts de Matlab se encuentran por defecto dentro del subdirectorio “resultados” que es donde se guardan todos ficheros de información para el cálculo de los potenciales. En ese directorio, habrá que ejecutar el programa “inicio.m”, escribiendo “inicio” en la línea de comandos de Matlab ó abriendo el fichero y ejecutándolo.

3. Optimización de la función espacial de Green

3.1 Introducción

En este tercer capítulo vamos a optimizar la función de Green obtenida mediante la formulación espacial de imágenes en un recinto cilíndrico *infinitesimal*, aunque todas las técnicas expuestas son válidas para cualquier tipo de estructura arbitraria definida, como veremos posteriormente.

Concretamente, nos vamos a centrar en el caso de situar una *fuentes eléctrica* en el interior de un cilindro, y vamos a buscar una medida de la corrección de la aproximación empleada, es decir, el grado en el que las condiciones de contorno son satisfechas.

Para ello, evaluaremos los potenciales (tanto escalar como vectorial) alrededor del contorno del cilindro, observando si se verifican las condiciones en cada punto, y en caso de que no sea así, obteniendo un valor que nos pueda representar el error cometido.

De esta manera obtendremos dos medidas ó ‘costes’:

- Coste del potencial escalar
- Coste del potencial vectorial

Una vez obtenido un ‘Coste’ en el cálculo de cada potencial, vamos a utilizar esta técnica para ver la efectividad del método de imágenes espaciales en función de la situación de la carga/dipolo origen en el interior de la cavidad, obteniendo unos resultados que indican claramente un aumento del error conforme la carga/dipolo imagen se sitúa muy cerca de las paredes del cilindro.

Posteriormente, vamos a optimizar este coste, es decir, modificaremos las posiciones de las cargas/dipolos imágenes y sus valores con el fin de obtener un coste menor, lo que equivaldrá a una mejor representación de los potenciales en el interior de la cavidad.

Optimizaremos de forma separada los potenciales escalar y vectorial:

- Potencial escalar:

Una vez definido un coste para este potencial, lo minimizaremos mediante distintas técnicas:

- a) Empleo de unos valores de las cargas/dipolos medios para promediar el error de los potenciales. Integración por pulsos.
- b) Búsqueda de los picos de error para situar entorno a ellos un mayor número de condiciones de contorno, con el fin de minimizarlos.
- c) Variación del radio en el que situamos las cargas/dipolos imágenes
- d) Optimización mediante una técnica de gradiente descendente del valor complejo de las cargas imágenes.
- e) Optimización mediante una técnica de gradiente descendente de las posiciones de las cargas entorno al cilindro.
- f) Empleo de las técnicas de optimización y variación del radio de forma conjunta.

○ Potencial vectorial:

En este caso, el cálculo del coste de la aproximación es mucho más complejo (pues las condiciones de contorno así lo son), siendo inviables técnicas complejas como la optimización por descenso de gradiente, y proporcionando resultados poco satisfactorios otros métodos, como el promediado del error de los potenciales. Se ha implementado para este caso la variación dinámica del radio de situación de los dipolos imagen, que es capaz de proporcionar resultados válidos a pesar de la complejidad de los cálculos requeridos.

Tras haber optimizado el Coste, tanto escalar como vectorial, por alguna de las técnicas descritas anteriormente, vamos a emplearlo para calcular el error obtenido en la aproximación de los potenciales en función de la situación de las carga/dipolo fuente, comprobando como el Coste se reduce de forma más que considerable.

Así, podemos limitar el número de cargas/dipolos imagen para conseguir una determinada exactitud en la aproximación; ello es muy aconsejable debido a los problemas de *sobredimensionamiento* que se producen si se imponen demasiadas condiciones de contorno, apareciendo problemas a la hora de resolver los sistemas de ecuaciones pues no están bien condicionados.

Representaremos gráficamente como se distribuye cada uno de los Costes alrededor del cilindro, para observar cuales son las zonas en la que se produce un aumento del error y tratar de minimizarlas.

En cuanto al coste computacional, éste varía en función de la técnica y del número de imágenes empleadas, siendo superior al coste que obteníamos en la implementación inicial (presentada en el capítulo 2). No obstante, conseguimos contener el coste total, depurando cada una de las técnicas con algoritmos de parada/detención que se detendrán de forma automática cuando hallamos alcanzado la precisión deseada (en caso de que sea posible).

En este caso particular, una geometría cilíndrica, en el que los errores son muy reducidos con un número no muy elevado de imágenes (15-20) la optimización puede ser suplida con un aumento de imágenes, que consiguen minimizar el error de la misma forma. No obstante, todas *las técnicas aquí descritas no toman como partida la geometría cilíndrica*, sino que pueden ser empleadas para cualquier otro tipo de *estructura arbitraria* (como veremos en el Capítulo 4) donde el error obtenido por las imágenes sin optimizar es demasiado elevado, siendo incorrecta la aproximación de los potenciales obtenida.

Al igual que en Capítulo 2, y por las mismas razones, hemos empleado el lenguaje de programación Fortran [12] para el cálculo numérico, así como Matlab© [13] para las representaciones gráficas obtenidas. Al final del capítulo, explicaremos brevemente los detalles principales de la implementación del código, así como lo necesario para una correcta compilación, ejecución y visualización de todos los resultados.

3.2 Optimización del potencial escalar

3.2.1 Introducción

En primer lugar, vamos a tratar de optimizar el potencial escalar para la estructura bajo análisis, en este caso un cilindro bidimensional.

Para ello, vamos a definirnos un ‘Coste’, con el fin de poder cuantificar el grado de corrección del potencial escalar obtenido; posteriormente desarrollaremos diversas técnicas con el fin de minimizar este coste y así obtener una mejor representación de los potenciales en el interior de la estructura, un cilindro en este caso.

Por la teoría desarrollada en el Capítulo 2, sabemos que el potencial escalar debe ser nulo alrededor del cilindro. Para lograrlo, imponíamos un número N de puntos tangentes alrededor de la estructura en los que satisfacíamos el requisito mediante la ecuación:

$$\sum_{k=1}^N q_k G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

No obstante esto solo implica que en N puntos discretos alrededor del contorno del cilindro se va a satisfacer la condición de potencial escalar nulo, mientras que en el resto de puntos no tiene porqué. Realmente, en estos puntos sobre los que no se ha impuesto la condición el potencial escalar, el valor del potencial es diferente de cero, por lo que no se están cumpliendo de forma exacta las condiciones de contorno.

El potencial escalar en el cilindro será por tanto:

$$G_{v_{cy}}(\vec{r}) = G_v(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k \cdot G_v(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (3.2)$$

Una medida para cuantificar el error cometido, sería recorrer todo el contorno de la estructura a analizar, obteniendo el potencial escalar en sus puntos y viendo cuales son distintos de cero. Matemáticamente:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} |G_{v_{cy}}| dc \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 nos define un coste del potencial escalar, definición que es independiente del tipo de estructura a analizar (aunque estemos analizando un cilindro en este caso).

Una vez definido el coste podemos aplicarlo a distintas situaciones con el fin de evaluar la precisión de los potenciales en cada caso.

Concretamente, el valor del coste dependerá del número de imágenes empleadas (pues cuantas más imágenes usemos, un mayor número de puntos discretos cumplirán la condición de contorno) y de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro.

Supongamos un cilindro de radio $a = \lambda$, (siendo la frecuencia de 300Mhz) en el que situamos la carga fuente en el interior del cilindro y empleamos un total de 15 imágenes para calcular el potencial escalar. La situación es representada en la figura 3.1:

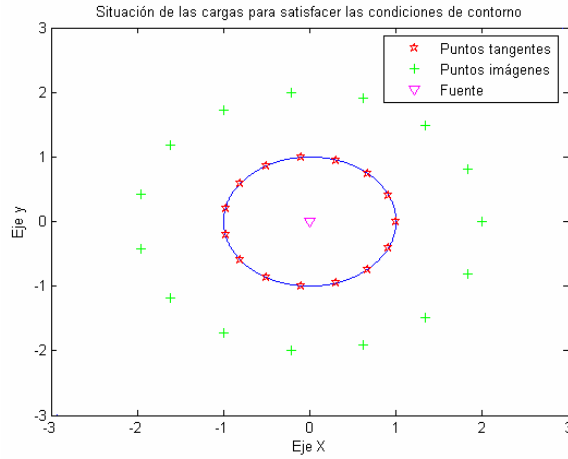
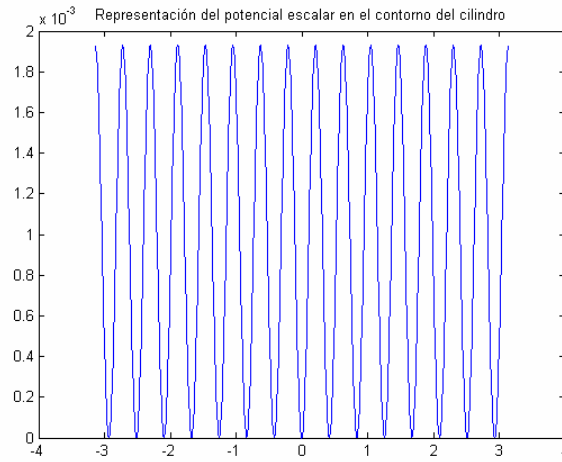


Figura 3.1 Representación 15 cargas imágenes alrededor del cilindro, fuente en origen coordenadas

En este caso, si representamos el valor absoluto del potencial escalar alrededor del cilindro, podemos ver en que medida y en que posiciones se cumple la condición de contorno (es decir, que este potencial sea nulo)



**Figura 3.2 Representación del potencial escalar en contorno del cilindro en función del ángulo.
Empleo de 15 imágenes, fuente en origen de coordenadas**

Podemos observar como existen 15 nulos, correspondientes a las 15 condiciones que hemos impuesto mediante la ecuación 3.1. De esta forma, si integramos el potencial escalar en todo el contorno del cilindro obtendremos el Coste, tal y como lo habíamos definido en la ecuación 3.3.

Concretamente y para este caso, obtenemos un error de:

$$Error = 6.051 \cdot 10^{-3}$$

Comprobamos como el error obtenido es muy reducido, lo que implica que la aproximación del potencial escalar con 15 cargas imágenes es adecuada.

Si situáramos la carga fuente en otra posición, para este mismo número de cargas imágenes, obtendremos un coste diferente en función de la posición escogida. Igual ocurre para una variación del número de cargas imágenes, que también modifica el valor del coste (en general, a mayor número de imágenes menor coste obtenido).

Por ejemplo, basándonos en las suposiciones del caso anterior, pero situando la carga en la posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$ obtenemos una situación y una distribución del coste como muestra la figura 3.3:

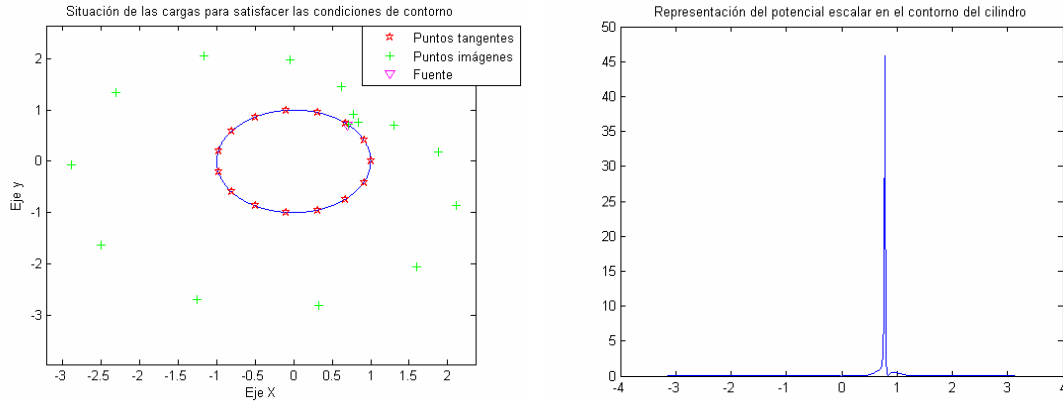


Figura 3.3 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 15 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Comprobamos como en un ángulo de 45° (0.785398 rad) obtenemos un pico del potencial, pues las cargas imágenes son incapaces de contrarrestar el efecto de la carga fuente situada tan cerca del contorno, produciéndose un Coste muy elevado respecto al anterior, concretamente con un valor de:

$$\text{Coste} = 1.606136$$

Ello implica que la representación de los potenciales en este caso es mucho menos exacta que en el caso anterior, no obstante todavía no es un valor muy elevado y se puede dar por válido.

Esta es una de las peores situaciones para esta formulación: la ubicación de la carga origen muy cerca de las paredes de la estructura a analizar. Posteriormente veremos una técnica capaz de reducir el coste en este caso. No obstante, como los circuitos que pueden ser analizados con esta formulación no se encuentran situados muy cerca de los bordes de las guías que los contienen, este error, aunque relevante, pierde parte de su importancia.

Entre las dos situaciones expuestas existe un gran abanico de posibilidades, en función del número de cargas imágenes empleadas y de la posición de la fuente. Realizaremos un barrido de estas variables para obtener unos costes de referencia en posiciones típicas y con un número de imágenes variable. Concretamente, vamos a analizar el coste del potencial escalar cuando situamos la fuente en las posiciones: $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$ y tenemos un número de cargas imágenes que puede ser (5, 10, 15, 20, 25, 30).

Así:

- a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006	3.07174e-008

Tabla 3.1 Coste método original, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

- b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	4.0841e-008

Tabla 3.2 Coste método original, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- c) Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	4.6492e-007

Tabla 3.3 Coste método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

- d) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	26.6829	23.6945	1.4449	1.320842e-002	2.8172e-004	2.5523e-005

Tabla 3.4 Coste método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

- *e) Posición $(0.5\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	17.9904	19.9656	0.9056	0.0070	9.6659e-005	3.7767e-006

Tabla 3.5 Coste método original, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$

- *f) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:*

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371

Tabla 3.6 Coste método original, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Tras analizar los resultados para el caso inicial, podemos extraer dos conclusiones interesantes:

- Al aumentar el número de cargas, en general, disminuye el coste que obtenemos. No obstante, existen algunos casos particulares que dependerán de las posiciones relativas de la carga fuente y las imágenes.
- En función de la posición de la carga fuente, conforme ésta se encuentra más cercana a la pared de la estructura (cilindro en este caso), el coste va creciendo.

De esta forma, tenemos totalmente caracterizado el comportamiento del potencial escalar, obteniendo sus errores en función de las características de la situación a analizar. En este punto vamos a introducir distintas técnicas que tratarán, con mayor o menor éxito, de reducir este error, con el fin de obtener con el mismo número de cargas imágenes un coste mucho menor, lo que equivaldrá a la hora de obtener los potenciales en una mayor exactitud.

Alguna de las técnicas probadas no han aportado los resultados esperados, como la *técnica de integración mediante pulsos* ó la *técnica de imposición de una nueva condición de contorno en el lugar de éste donde el error fuera máximo*. No obstante las incluiremos en el estudio, por haberlas considerado teóricamente válidas (en algunas situaciones obtienen resultados correctos).

Por otro lado destacaremos por lo satisfactorio de sus resultados las técnicas de *variación dinámica del radio de las cargas imagen* y la de la *optimización del valor complejo y posiciones de las cargas mediante un algoritmo de descenso de gradiente*.

A continuación pasaremos a estudiar detenidamente cada una de estas técnicas, exponiendo la base teórica de la que parten y estudiando sus resultados mediante ejemplos prácticos.

3.2.2. Método de optimización “Integración por pulsos”

En el método propuesto para el cálculo del potencial escalar en el capítulo 2, se realizaba la imposición de las condiciones de contorno sobre puntos discretos de la pared de la estructura a analizar. Al tomar un número finito de puntos, la condición de contorno no se va a cumplir sobre toda la pared de la estructura, por lo que existirá un cierto coste ó error al obtener los potenciales en su interior.

Un posible método de solucionar este problema consiste en no forzar el cumplimiento de la condición de contorno en puntos discretos, sino a lo largo de un tramo de la pared del mismo. Para ello, se emplearán funciones de test tipo “pulso” que recorrerán el contorno de la estructura, y sobre los que se integrará el valor del potencial para tratar de forzar que en media sea nulo.

De esta forma, el valor complejo que asignaremos a la cargas imagen lo obtendremos de tal forma que fuercen que el potencial escalar sea nulo en un tramo del contorno de la estructura (que estará definido en el interior de un “pulso”).

Matemáticamente podemos traducir esta “integración por pulsos” de forma sencilla, partiendo de la ecuación 3.1, multiplicándola a ambos lados por un pulso e integrando a lo largo del contorno de la estructura:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N q_k \cdot G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot \Pi(i) \cdot dr_i = \int_{-\infty}^{+\infty} -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \cdot \Pi(i) \cdot dr_i \quad (3.4)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

Al ser la integral y el sumatorio sistemas lineales, se pueden intercambiar, quedando:

$$\sum_{k=1}^N q_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot \Pi(i) \cdot dr_i = - \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \cdot \Pi(i) \cdot dr_i \quad (3.5)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

Finalmente, debido a la presencia del pulso, la integral únicamente estará definida dentro de las posiciones del mismo, es decir, la integral de la función de green en el contorno del segmento que está delimitado por la función pulso.

$$\sum_{k=1}^N q_k \cdot \int_{\text{segmento } 'i'} G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot dr_i = - \int_{\text{segmento } 'i'} G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \cdot dr_i \quad (3.6)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

Siendo este el sistema que evaluaremos y que nos proporcionará el valor complejo de las cargas imagen.

El problema en este punto radica en como evaluar la integral, para lo que se idearon varias estrategias. En primer lugar, se propuso evaluarlas mediante las denominadas aproximaciones de Newton (como por ejemplo la aproximación del Trapecio, aproximación de Simpson, etc) tanto abiertas como cerradas (es decir, con ó sin solape de puntos de información). Posteriormente, se evaluó tomando una gran cantidad de puntos intermedios en lugar de puntos aislados.

A continuación, mostraremos la teoría existente detrás de cada uno de los métodos propuestos, para finalmente, realizar una comparativa entre ellos viendo los problemas que presentan.

3.2.2.1 Aproximación del Trapecio

En este caso, realizaremos una aproximación de la integral mediante la conocida regla del trapecio,

$$\int_{F1}^{F2} G_v(r) dr = h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot G_v(F1) + \frac{1}{2} \cdot G_v(F2) \right] \quad (3.7)$$

siendo h la distancia entre F1 y F2 en el cilindro (dos puntos tangentes a la estructura consecutivos).

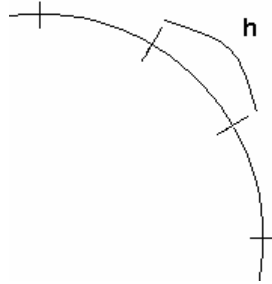


Figura 3.4 Distancia entre puntos tangentes en la aproximación del trapecio

En este punto vamos a desarrollar el sistema de ecuaciones resultante en este caso, y comparar su validez para un número '*impar*' de puntos tangentes, así como observar que obtenemos una singularidad para un número '*par*', por lo que el sistema no puede ser resuelto en este caso.

En primer lugar, se va a realizar un cambio de nomenclatura para limitar la extensión de las ecuaciones, así la función de Green que va desde los puntos tangentes hasta las imágenes la renombraremos como:

$$\begin{array}{lll} Gv(r_1, r_1') = F1 & Gv(r_1, r_2') = F1' & Gv(r_1, r_N') = F1^{(N)} \\ Gv(r_2, r_1') = F2 & Gv(r_2, r_2') = F2' & Gv(r_2, r_N') = F2^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (3.8)$$

Por su parte la función de Green que va desde los puntos tangentes (r_1) hasta la fuente (r_0'), serán:

$$Gv(r_1, r_o') = G1 \quad Gv(r_2, r_o') = G2 \quad \dots \quad Gv(r_N, r_o') = GN \quad (3.9)$$

De esta forma, podemos partir del sistema de ecuaciones inicial para el caso Point-Matching que como vimos en el capítulo 2 resultaba:

$$\begin{bmatrix} Gv(r_1, r_1') & Gv(r_1, r_2') & \dots & Gv(r_1, r_N') \\ Gv(r_2, r_1') & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Gv(r_N, r_1') & \dots & \dots & Gv(r_N, r_N') \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Gv(r_1, r_o') \\ Gv(r_2, r_o') \\ \dots \\ Gv(r_N, r_o') \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

y renombrarlo de forma:

$$\begin{bmatrix} F1 & F1' & \dots & F1^{(n)} \\ F2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ FN & \dots & \dots & FN^{(N)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G1 \\ G2 \\ \dots \\ GN \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

El siguiente paso será plantear el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta el test mediante pulsos:

$$\begin{bmatrix} \int_{segmento1} Gv(r_1, r_2') * dr_1 & \int_{segmento1} Gv(r_1, r_2') * dr_1 & \dots & \int_{segmento1} Gv(r_1, r_N') * dr_1 \\ \int_{segmento2} Gv(r_2, r_1') * dr_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{segmentoN} Gv(r_N, r_1') * dr_N & \dots & \dots & \int_{segmentoN} Gv(r_N, r_N') * dr_N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_{segmento1} Gv(r_1, r_o') * dr_1 \\ \int_{segmento2} Gv(r_2, r_o') * dr_2 \\ \dots \\ \int_{segmentoN} Gv(r_N, r_o') * dr_N \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

teniendo en cuenta la aproximación de Trapecios (y la nueva nomenclatura), podemos simplificar la ecuación anterior como:

$$\begin{bmatrix} h * \frac{F1+F2}{2} & h * \frac{F1'+F2'}{2} & \dots & h * \frac{F1^{(n)}+F2^{(n)}}{2} \\ h * \frac{F2+F3}{2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h * \frac{FN+F1}{2} & \dots & \dots & h * \frac{FN^{(N)}+F1^{(N)}}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h * \frac{G1+G2}{2} \\ h * \frac{G2+G3}{2} \\ \dots \\ h * \frac{GN+G1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

si sacamos factor común a $\frac{h}{2}$ y eliminamos ese término, nos quedaría el sistema:

$$\begin{bmatrix} F1+F2 & F1'+F2' & \dots & F1^{(n)}+F2^{(n)} \\ F2+F3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ FN+F1 & \dots & \dots & FN^{(N)}+F1^{(N)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G1+G2 \\ G2+G3 \\ \dots \\ GN+G1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Podemos demostrar algebraicamente que esta ecuación es igual al caso del Point-Matching, pues:

$$\left(\begin{bmatrix} F1 & F1' & \dots & F1^{(n)} \\ F2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ FN & \dots & \dots & FN^{(N)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F2 & F2' & \dots & F2^{(n)} \\ F3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F1 & \dots & \dots & F1^{(N)} \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} G1 \\ G2 \\ \dots \\ GN \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G2 \\ G3 \\ \dots \\ G1 \end{bmatrix} \right) \quad (3.15)$$

Entonces para que se verifique el sistema, y recordando la ecuación 3.11, se debe de cumplir que:

$$\begin{bmatrix} F2 & F2' & \dots & FN^{(n)} \\ F3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F1 & \dots & \dots & F1^{(N)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G2 \\ G3 \\ \dots \\ G1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

y como únicamente hemos desplazado una fila hacia abajo la matriz F y la matriz G (de coeficientes y de resultados) y de forma simultánea, se debe cumplir forzosamente la relación.

Por tanto concluimos matemáticamente que el cálculo de Potencial escalar mediante Point-Matching es identico al obtenido mediante un Test con aproximación de integrales por trapecios.

Una vez concluido que, de existir solución, ésta es equivalente, debemos asegurarnos de que el sistema formado puede ser resuelto.

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución es que el determinante de la matriz 'F' exista y sea distinto de 0. Es decir, que:

$$\begin{vmatrix} F1+F2 & F1'+F2' & \dots & F1^{(n)} + F2^{(n)} \\ F2+F3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ FN+F1 & \dots & \dots & FN^{(N)} + F1^{(N)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.17)$$

Observamos que la matriz resultante es la suma de dos matrices:

$$F = \begin{bmatrix} F1 & F1' & \dots & F1^{(n)} \\ F2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ FN & \dots & \dots & FN^{(N)} \end{bmatrix} \quad F_{despl} = \begin{bmatrix} F2 & F2' & \dots & FN^{(n)} \\ F3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F1 & \dots & \dots & F1^{(N)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

siendo F_{despl} la matriz F desplazado de forma circular una fila hacia abajo. Tanto la matriz F como la matriz F_{despl} son matrices no singulares, cuyo determinante es distinto de 0.

Se demuestra algebraicamente que el determinante de $F + F_{despl}$ es:

$$|F + F_{despl}| = |F| + (-1)^{N-1} \cdot |F| \quad (3.19)$$

siendo 'N' el rango de la matriz, que en nuestro caso, coincide con el número de puntos tangentes impuestos sobre el contorno del cilindro.

Por tanto, podemos concluir sobre la aproximación mediante Trapecios que:

- Si el número de cargas imágenes es impar el resultado de la aproximación mediante Trapecios se corresponde de forma exacta con el método de Point-Matching.
- Si el número de cargas imágenes es par, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

3.2.2.2 Aproximaciones numéricas cerradas

En este tipo de aproximaciones de las integrales, tomaremos puntos discretos y trataremos de obtener el resultado de la integral evaluando el valor del potencial en esos puntos discretos. Son cerradas porque vamos a tomar los puntos discretos de tal forma que se va a producir solape de información: los valores de potencial obtenidos en un punto serán usados en varios tramos (de la misma forma que ocurría en la aproximación por trapecio). Gráficamente:

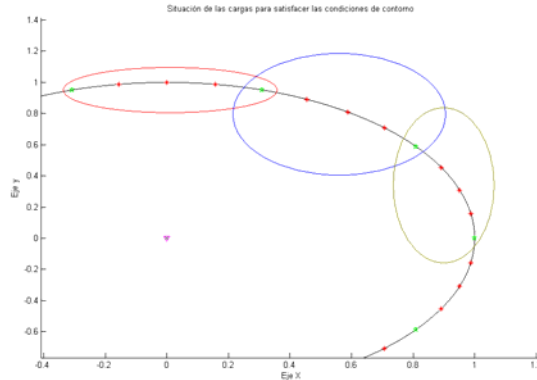


Figura 3.5 Aproximaciones integrales cerradas: solape de información

De esta forma tomaremos puntos intermedios en el contorno de la estructura situados entre dos puntos tangentes (sobre los que habíamos impuesto un nulo de potencial). En función del número de puntos intermedios que tomemos, realizaremos una aproximación u otra de la integral:

a) *Simpson's rule*

En este caso tomaremos un único punto intermedio, por lo que la aproximación de la integral quedaría:

$$\int_{F1}^{F3} Gv(r) dr = h * \left[\frac{1}{3} * Gv(F1) + \frac{4}{3} * Gv(F2) + \frac{1}{3} * Gv(F3) \right] \quad (3.20)$$

siendo h la distancia entre F1 y F2 en el cilindro y F2 un punto intermedio en el cilindro entre F1 y F3 (que son los puntos tangentes a la estructura sobre los que imponemos las condiciones de contorno).

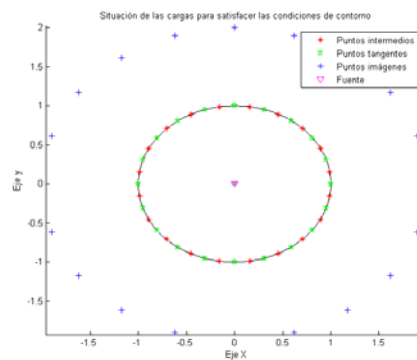
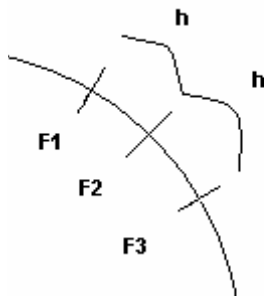


Figura 3.6 Características de la aproximación de Simpson's

b) Simpson's 3/8 rule

En este caso tomaremos dos puntos intermedios, por lo que la aproximación de la integral quedaría:

$$\int_{F1}^{F4} G_v(r) dr = h \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot G_v(F1) + \frac{9}{8} \cdot G_v(F2) + \frac{9}{8} \cdot G_v(F3) + \frac{3}{8} \cdot G_v(F4) \right] \quad (3.21)$$

siendo h la distancia entre F1 y F2 en el cilindro (es decir, entre dos puntos contiguos de un mismo segmento).

c) Bode rule

En este caso tomaremos tres puntos intermedios, por lo que la aproximación de la integral quedaría:

$$\int_{F1}^{F5} G_v(r) dr = h \cdot \left[\frac{14}{45} \cdot G_v(F1) + \frac{64}{45} \cdot G_v(F2) + \frac{24}{45} \cdot G_v(F3) + \frac{64}{45} \cdot G_v(F4) + \frac{14}{45} \cdot G_v(F5) \right] \quad (3.22)$$

siendo h la distancia entre F1 y F2 en el cilindro (es decir, entre dos puntos contiguos de un mismo segmento).

El principal problema que presentan las aproximaciones cerradas es que se vuelve a repetir el problema encontrado con la aproximación del Trapecio, debido al solape de información. De esta forma, cada vez que se emplea un número par de imágenes se obtiene un sistema incompatible (pues dos de sus filas son combinación lineal). Para tratar de solucionar este problema, se introduciremos las aproximaciones integrales semi-abiertas.

3.2.2.3 Aproximaciones numéricas semi-abiertas

Empleamos una aproximación integral semi-abierta con el fin de evitar introducir la misma información en varios elementos de la matriz principal a la hora de resolver el sistema de ecuaciones. De esta forma, el sistema de ecuaciones que se forma siempre tendrá solución. La forma de realizar esta aproximación es teniendo en cuenta únicamente el límite superior de la integral y los puntos internos, sin emplear el valor de la función en el límite inferior.

Gráficamente:

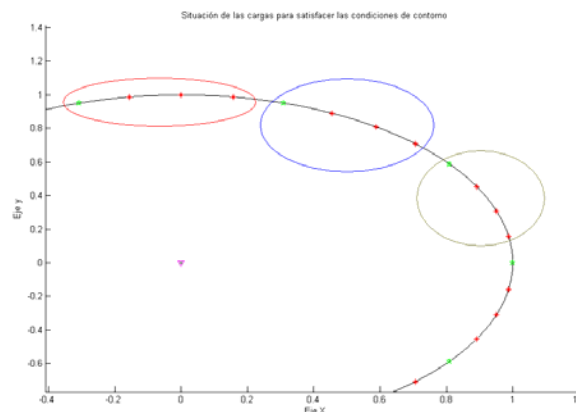


Figura 3.7 Aproximaciones integrales semi-abiertas: no se solapa la información

Se han implementado dos aproximaciones semi-abiertas:

a) Aproximación semi-abierta con 4 puntos intermedios:

En este caso tomaremos cuatro puntos intermedios, por lo que la aproximación de la integral quedaría:

$$\int_{F1}^{F6} Gv(r)dr = h \cdot \left[\frac{23}{12} \cdot Gv(F2) + \frac{7}{12} \cdot Gv(F3) + Gv(F4) + \frac{13}{12} \cdot Gv(F5) + \frac{5}{12} \cdot Gv(F6) \right] \quad (3.23)$$

siendo h la distancia entre F2 y F3 en el cilindro (es decir, entre dos puntos contiguos de un mismo segmento).

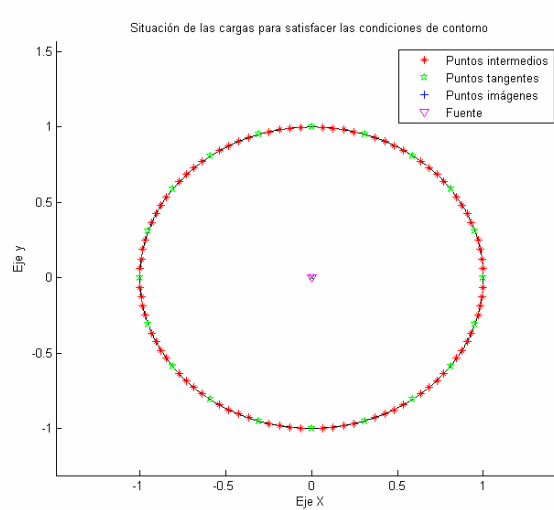


Figura 3.8 Situación de los puntos intermedios en una aproximación semi-abierta

b) Aproximación semi-abierta con 10 puntos intermedios:

En este caso, la aproximación ha sido:

$$\int_{F1}^{F11} Gv(r)dr = h \cdot \left[\frac{23}{12} * Gv(F2) + \frac{7}{12} * Gv(F3) + Gv(F4) + Gv(F5) + Gv(F6) + Gv(F7) + Gv(F8) + Gv(F9) + \frac{13}{12} * Gv(F10) + \frac{5}{12} * Gv(F11) \right] \quad (3.24)$$

siendo h la distancia entre F1 y F2 en el cilindro (es decir, entre dos puntos contiguos de un mismo segmento).

Este caso es una generalización del caso anterior, empleando un mayor número de puntos internos, y lo utilizamos para ver la influencia de los mismos en el cumplimiento de las condiciones de contorno del cilindro.

3.2.2.4 Aproximación del Trapecio tomando una gran cantidad de puntos intermedios

En este caso, se ha realizado una aproximación de la integral de la ecuación 3.6 tomando una cantidad enorme de puntos intermedios y realizando la integral mediante la regla de trapecio. La diferencia fundamental con el apartado 3.2.2.1 es que no se realiza la aproximación con dos puntos tangentes sobre los que está la condición de contorno, sino que se ha realizado de forma progresiva empleando un número muy elevado de puntos intermedios y utilizándolos todos de forma conjunta.

Por ejemplo, a la hora de analizar un arco de la cavidad cilíndrica emplearemos:

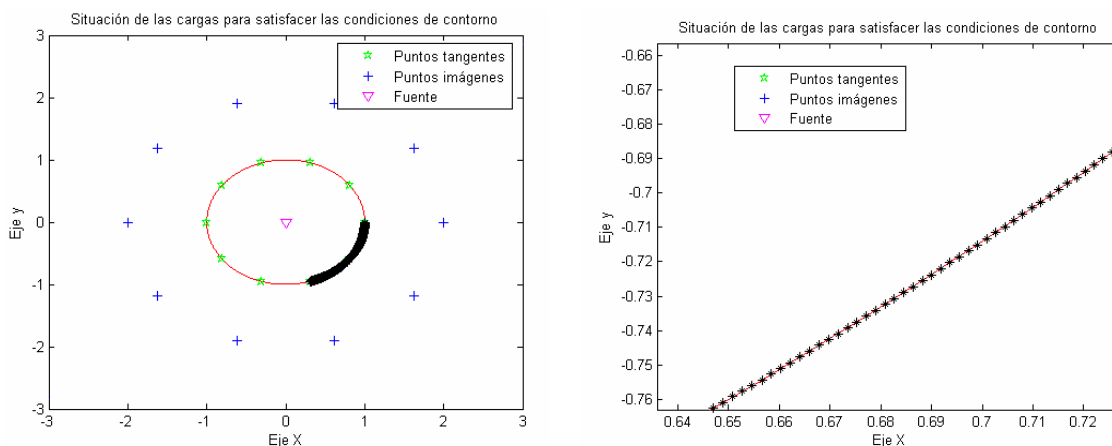


Figura 3.9 Detalle de los puntos intermedios tomados en un arco del cilindro al realizar una aproximación por Trapecio general

Observamos como en este caso tomamos suficientes puntos para conseguir unos resultados más satisfactorios, quedando cada uno de los arcos completamente caracterizados.

3.2.2.5 Resultados de las distintas aproximaciones con integración de pulsos

Para obtener unos resultados comparativos entre las distintas técnicas empleadas y la técnica original de Point-Matching, fuimos variando la situación de la carga fuente en el interior del cilindro y el número de cargas imágenes (y por tanto puntos tangentes sobre los que imponer las condiciones de contorno) con el que abordaremos el problema, observando el error cometido en las condiciones de contorno en cada caso.

Tras implementar los métodos anteriores, se han obtenido unos resultados no muy satisfactorios, siendo la técnica inicial de Point-Matching (es decir establecimiento de las condiciones de contorno en puntos discretos finitos) muy superior en la mayoría de las ocasiones siendo además su coste computacional más reducido.

Los resultados de estas comparativas pueden ser examinadas en el [ANEXO I](#); no se han incluido en esta descripción debido a que no aportan resultados suficientemente válidos para detenernos en su análisis.

Podemos llegar a las siguientes conclusiones referentes a la integración por pulsos:

- Al observar el potencial escalar en el contorno del cilindro, tras utilizar la integración por pulsos, vemos como no se imponen ceros en los puntos tangentes alrededor del cilindro, sino que obtenemos un valor más “promediado”, que nos dará un error superior o inferior al Point-matching según la localización de la carga en el interior del cilindro.
- Al utilizar una aproximación por Trapecio, empleando como puntos de interpolación los puntos tangentes sobre los que se introdujo la condición de contorno, los resultados son idénticos a los de Point-Matching cuando usamos un número de cargas imagen impar, obteniendo un resultado incorrecto cuando este número es par.
- Las aproximaciones integrales cerradas (es decir, las de Simpson, Simpson 3/8 y Bode) presentan el mismo problema que la aproximación por Trapecio, siendo únicamente correctas cuando empleamos un número de cargas imágenes impar, pues en caso contrario, obtenemos un sistema de ecuaciones incompatible (que es resuelto de forma errónea por el software, dando por tanto resultados con un error mucho mayor que en el resto de los casos). Para el caso en el que son correctas, consiguen un resultado muy similar al obtenido con Point-Matching, mejorando levemente el error cometido cuando la carga se encuentra situada en el centro del cilindro, y empeorando los resultados cuando la carga se va acercando a las paredes. Su empleo no es práctico, pues depende del número de cargas imagen escogidas (par o impar), aumenta su coste computacional y proporciona unos resultados ‘oscilantes’ (a veces mejora a veces empeora) frente a los de Point-Matching.
- Las aproximaciones integrales semi-abiertas, consiguen unos resultados válidos en la mayoría de las ocasiones (exceptuando algún caso puntual en el que el sistema de ecuaciones no tiene solución y presenta resultados incoherentes). Los resultados obtenidos dependerán fundamentalmente de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro:
 - Si la carga fuente se encuentra en las inmediaciones del centro del cilindro, obtenemos una mejoría muy sustancial, con una convergencia más rápida y unos errores relativos mucho menores para casi todos los casos.
 - Si la carga fuente se va alejando del centro del cilindro, obtenemos unos costes levemente superiores a los obtenidos mediante Point-Matching.
- Finalmente, al usar una integración con Trapecio y un número enorme de puntos intermedios para obtener una mayor precisión, conseguimos unos resultados muy próximos en casi todas las situaciones a los obtenidos con Point-Matching, mejorando en ocasiones puntuales (fundamentalmente cuando la carga se encuentra cerca del centro del cilindro) a los mismos. Como contrapartida, este método presenta un coste computacional muy elevado, para proporcionar un coste levemente superior al de Point-Matching junto a la existencia de ciertos casos particulares donde se producen singularidades.

De esta forma, podemos concluir que a primera vista no se ha obtenido una mejora sustancial con el empleo de una integración por pulsos. No obstante, es un tema pendiente de una investigación más profunda y que presenta grandes posibilidades de viabilidad. Concretamente, se puede tratar de realizar otras aproximaciones integrales más precisas que presenten resultados más correctos a la hora de plantear la ecuación 3.6 proporcionando resultados mucho más promediados sin necesidad de incluir nulos únicamente en puntos discretos de la estructura.

3.2.3. Método de variación dinámica de cargas en picos de potencial

3.2.3.1 Desarrollo teórico

Este método es uno de los más intuitivos que presentaremos, siendo capaz de proporcionar unos resultados moderados, ligeramente superiores a los de Point-Matching para situaciones particulares.

A diferencia de los casos anteriores, variaremos de forma dinámica el número de cargas imágenes empleadas. De esta forma, comenzaremos analizando los potenciales y la distribución del mismo alrededor del contorno de la estructura (para ver el grado de cumplimiento de las condiciones impuesta), buscaremos la posición en la que se produce el máximo de este potencial y lo contrarrestaremos introduciendo una nueva condición de contorno en ese punto.

Para la aplicación de este método es necesario una situación inicial de partida (una configuración de cargas imágenes, posicionamiento de las mismas y puntos tangentes sobre los que imponer las condiciones de contorno), sobre la cual se irá evolucionando introduciendo más cargas imágenes que controlaran el potencial en puntos discretos correspondientes a máximos de potencial.

Veamos el funcionamiento del método mediante un ejemplo; supongamos una configuración con 14 cargas imágenes, situadas alrededor de un cilindro infinitesimal en la que se ha colocado una fuente puntual en la posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$, tal y como indica la figura siguiente:

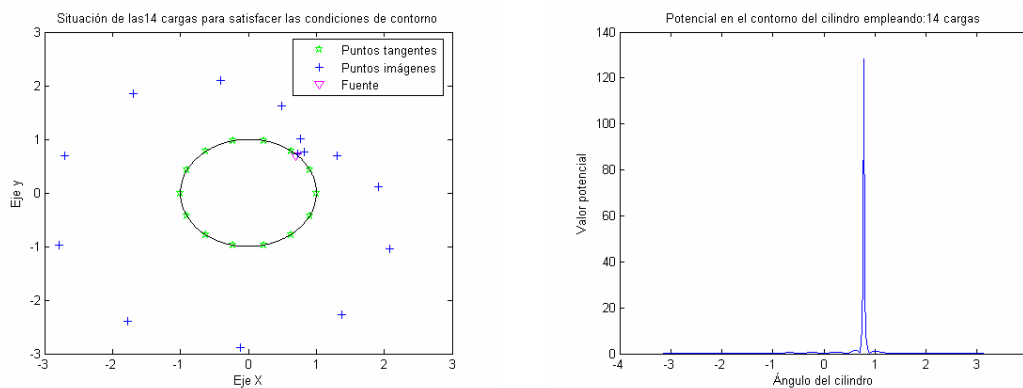


Figura 3.10 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 14 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Comprobamos como se produce un pico de potencial en el contorno de la estructura debido a la presencia de la carga fuente muy cerca de las paredes; en este punto el método consistirá en encontrar la posición de este máximo (situado a 0.7258 radianes), y situar justamente ahí un nuevo punto discreto donde se fuerce a que el potencial escalar sea nulo. Así la nueva situación será la siguiente:

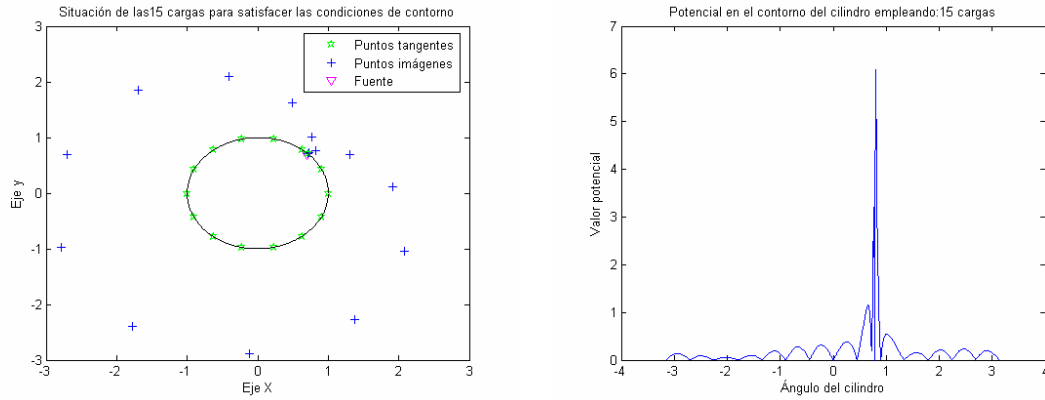


Figura 3.11 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro tras ubicar un punto tangente en un pico de potencial, empleo de 15 imágenes y fuente situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Realizando un zoom podemos observar con más detalle la posición del nuevo punto tangente donde forzar la condición de contorno y de la carga imagen asociada:

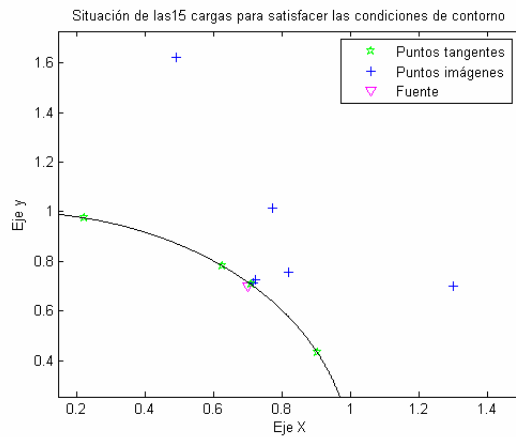


Figura 3.12 Detalle de la ubicación de un nuevo punto de condición de potencial nulo donde se encontraba anteriormente un pico de potencial.

Observando la figura 3.11 podemos comprobar como el pico de potencial existente con 14 cargas imágenes (con un valor muy elevado, de más de 128.4) se reduce de forma considerable al introducir la nueva condición de contorno (pasando a tener un valor de poco más de 6), aumentando las oscilaciones del potencial a lo largo de toda la pared del cilindro. De esta forma, conseguimos reducir el valor del coste de 6.033 que teníamos al emplear 14 cargas, a un total de 1.3616 al usar una carga más de forma adecuada. No obstante, si distribuimos las 15 cargas de forma usual (como se muestra en la figura 3.3), obtenemos un error de 1.6061, ligeramente superior. Sin embargo tenemos la ventaja de que eliminamos el pico de error, distribuyendo el mismo de una forma más equitativa a lo largo del contorno de la estructura.

Tenemos dos formas de emplear este método:

- Usarlo a partir de una distribución de imágenes dada, para tratar de reducir la influencia de un pico de potencial particular.
- Partir de una situación inicial y repetir el método de forma iterativa (buscando máximos de potencial, situando ahí la nueva condición de contorno y calculando nuevamente los potenciales).

3.2.3.2 Resultados obtenidos

A la hora de presentar los resultados con este método, es fundamental discernir entre las dos posibles configuraciones elegidas.

El primero de los casos, tratar de eliminar picos de potencial, será útil fundamentalmente cuando la carga se encuentre situada muy cerca de las paredes del cilindro. Partiendo de la situación estudiada previamente, con la fuente puntual situada en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$, realizaremos una comparativa del error en función del número de imágenes empleadas de partida al usar este algoritmo, así como una comparación final con los resultados del métodos general.

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	8.0995				8.0995
11	1.2031				
12	1.1820				
13	1.1217	11.2623			
14	1.1220	2.2962			
15	1.1530	2.0504			1.6061
16	1.0949	2.1947	0.8639		
17	0.9710	2.0100	0.6412		
18	1.0705	1.9359	0.6069		
19	1.8399	1.9205	0.6187	3.7204	
20	0.9958	1.8298	0.5594	0.1986	4.2177
21	1.7867	1.8400	0.5878	0.2029	
22	1.5244	1.7896	0.4508	0.2289	
23	1.5881	1.7708	0.4382	0.1698	
24	1.9221	1.7239	0.3882	0.1303	
25	0.6174	1.3796	0.3731	0.1441	0.4510

Tabla 3.7 Resultado del coste al realizar una ubicación de cargas teniendo en cuenta el máximo del potencial, de forma iterativa, y teniendo en cuenta el número de cargas de la situación de inicio.

De esta forma, se impone alrededor del pico de potencial una gran cantidad de condiciones de nulidad, forzando a éste a tener valores más reducidos. Gráficamente se puede observar en la figura 3.13 la distribución del potencial en el caso que presenta un menor coste, es decir, 25 cargas imágenes habiendo evolucionado las mismas desde una situación inicial de 19.

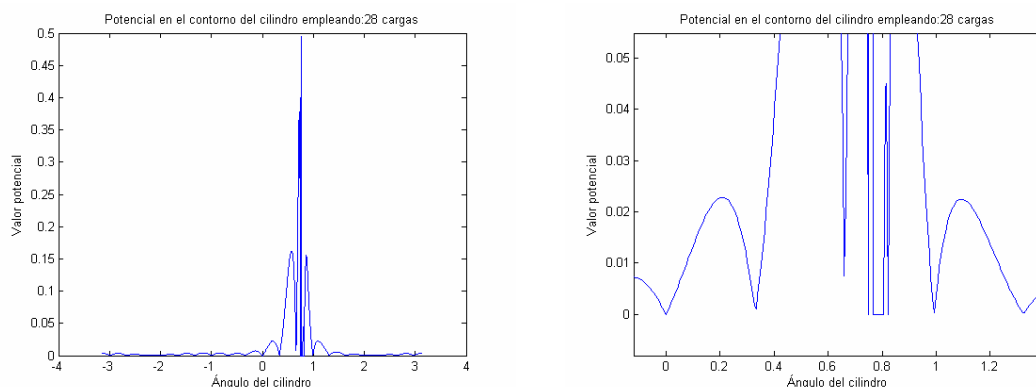


Figura 3.13 Detalle de la distribución del potencial, 25 cargas imágenes habiendo evolucionado su colocación en picos de potencial desde 19 cargas. Fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Vemos como se ha forzado a valores de potenciales nulos en torno al pico central del potencial, y aunque no se ha conseguido eliminar este pico si se ha reducido de forma considerable.

Uno de los inconvenientes de este método es que su resultado final va a depender de una “evolución” a partir de una situación de inicio, no pudiéndose determinar a priori que situación inicial proporcionará unos resultados más satisfactorios.

En cuanto a su empleo en situaciones en las que la carga fuente no se encuentra muy cerca de la pared, sus resultados no son satisfactorios. Esto es debido a que los distintos picos de potencial son muy parecidos, y una distribución de cargas que contribuya a la eliminación de un pico de potencial en particular, provocará una descompensación en la distribución del mismo. Por ejemplo, en la figura siguiente podemos observar la distribución del potencial al situar la fuente en el origen, con 15 imágenes (habiendo evolucionado desde una situación inicial de 10) frente a la situación general de 15 imágenes de Point-Matching:

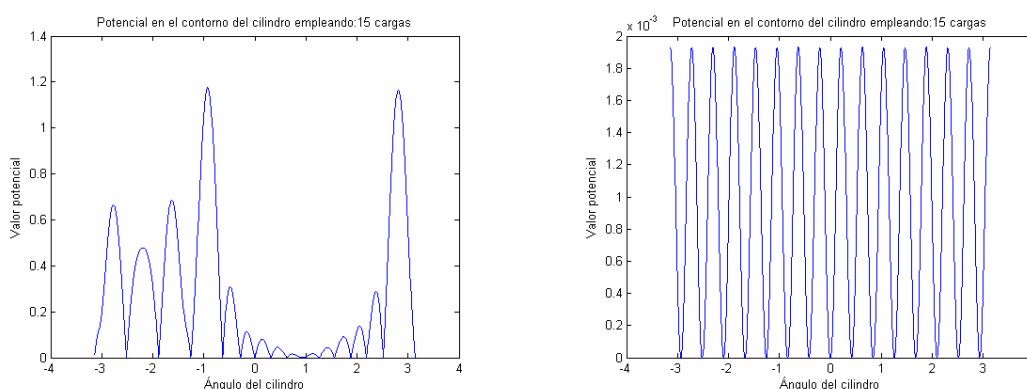


Figura 3.14 Distribución del potencial a lo largo del contorno del cilindro con 15 imágenes.
a) Situando las cargas en picos de potenciales y evolucionando desde una situación inicial de 10 imágenes. b) Empleando Point-Matching.

Comprobamos como la distribución de potencial original de Point-Matching es simétrica y de valor muy reducido, frente a una distribución más descompensada del método aquí expuesto. Ello es debido a que los picos de potenciales eran originalmente muy parecidos y no existía una diferencia suficiente entre ellos para tratar de reducir uno en concreto.

El resto de valores de los costes para las distintas situaciones empleando la ubicación de cargas en picos de potencial puede ser examinado en el ANEXO II.

3.2.4. Método de la variación dinámica del radio imagen

3.2.4.1 Desarrollo teórico

Esta es la técnica que ha proporcionado unos resultados más satisfactorios, reduciendo en casi todos los casos el coste del potencial escalar en un porcentaje muy elevado.

El método se basa en una ubicación de las cargas imagen diferente a la empleada hasta ahora, concretamente mantendremos las cargas imágenes en un círculo alrededor de la estructura a analizar (independientemente de la forma de la estructura y de la posición de la fuente en el interior de la misma)

Supongamos una situación de 20 cargas imágenes, donde hemos situado la carga fuente en una situación distinta del origen, por ejemplo en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$, analizada por el sistema de ubicación de cargas empleado hasta ahora:

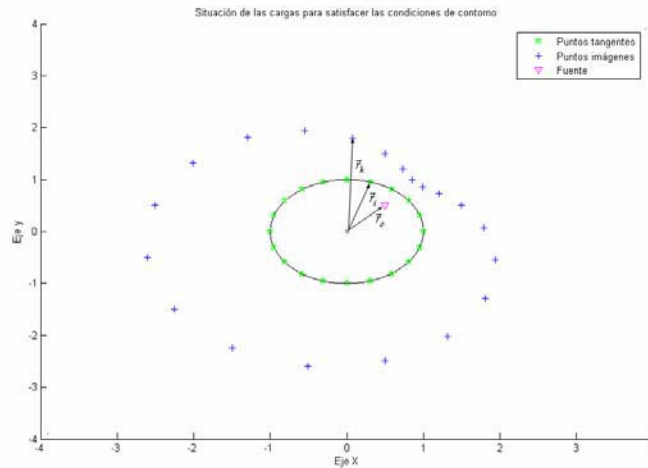


Figura 3.15 Situación 20 cargas imagen alrededor cilindro, fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

Comprobamos como la situación de cada carga imagen se obtiene mediante la simetría de la fuente respecto a un plano tangente que pasa por un punto del contorno del cilindro (donde se verificará la condición de contorno). Este método fue explicado y desarrollado en el Capítulo 2.

En este nuevo método propuesto variamos la forma de establecer la posición de las cargas imágenes, con el fin de tratar de satisfacer al máximo las condiciones de contorno. Concretamente, la situación de las cargas imágenes será en un círculo de radio constante (que luego podremos ir variando), y no dependerá ni de la posición de la carga fuente ni del tipo de estructura a analizar.

Así, para el mismo caso que en el ejemplo anterior, empleando 20 cargas imágenes y una fuente en el interior del cilindro con una posición de $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$ obtenemos una situación:

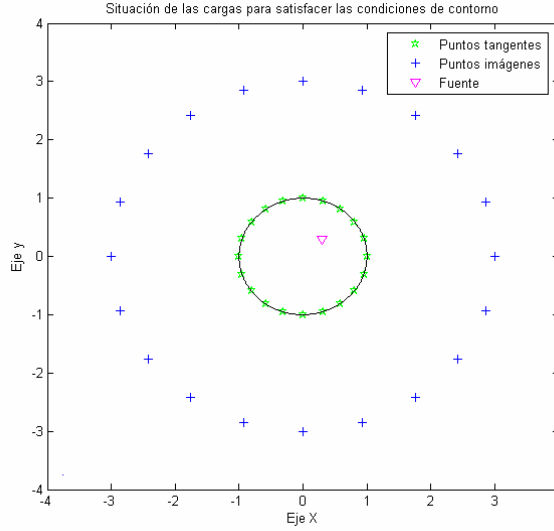


Figura 3.16 Situación 20 cargas imagen , fuente ubicada en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

El variar la posición de las cargas no afecta a la matemática empleada para la obtención del potencial escalar, salvo en el cálculo de las distancias de las cargas imágenes al centro del cilindro, a la posición de la fuente y a los puntos tangentes en el contorno del cilindro.

De esta forma, debemos de resolver el sistema planteado anteriormente en la ecuación 3.1, que extendida queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} Gv(r_1, r_1') & Gv(r_1, r_2') & \dots & Gv(r_1, r_N') \\ Gv(r_2, r_1') & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Gv(r_N, r_1') & \dots & \dots & Gv(r_N, r_N') \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Gv(r_1, r_o') \\ Gv(r_2, r_o') \\ \dots \\ Gv(r_N, r_o') \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Donde cada vector será:

- $\vec{r}_i \rightarrow$ Vector del origen al punto tangente 'i' del cilindro.
- $\vec{r}_k' \rightarrow$ Vector del origen a la posición de la imagen 'k'.
- $\vec{r}_o' \rightarrow$ Vector del origen a la posición de la fuente interna en el cilindro.

Una vez resuelto el sistema, obtendremos el valor del potencial escalar de la misma forma que en casos anteriores:

$$Gv_{cy}(\vec{r}) = Gv(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k \cdot Gv(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (3.26)$$

El algoritmo seguido por tanto consistirá en variar el radio de las cargas imágenes, y obtener un coste. Así obtendremos qué radio es el que produce un menor error y será el que empleemos en el cálculo del potencial escalar.

En cuanto al coste computacional, dependerá fundamentalmente de los límites entre los que variemos el radio de las imágenes, y el paso con el que nos movamos entre esos límites. Este parámetro suele ser elevado, debido a la alta carga computacional empleada en calcular el 'Coste' para una determinada distribución de imágenes.

3.2.4.1 Resultados obtenidos

Una vez posicionadas las cargas imágenes en un círculo de un determinado radio “R” alrededor de la estructura, vamos a realizar un estudio del Coste del potencial escalar en función del radio en el que se encuentran situadas las cargas imágenes. Este radio va a proporcionar valores “óptimos” que consiguen minimizar de forma más que considerable el coste del potencial escalar.

En primer lugar, antes de mostrar los resultados para todos los casos, vamos a estudiar detenidamente un caso “tipo”, por ejemplo, empleando un total de 20 cargas imágenes y situando la fuente en el centro del cilindro [posición $(0\lambda, 0\lambda)$], tal y como describe la figura 3.17.

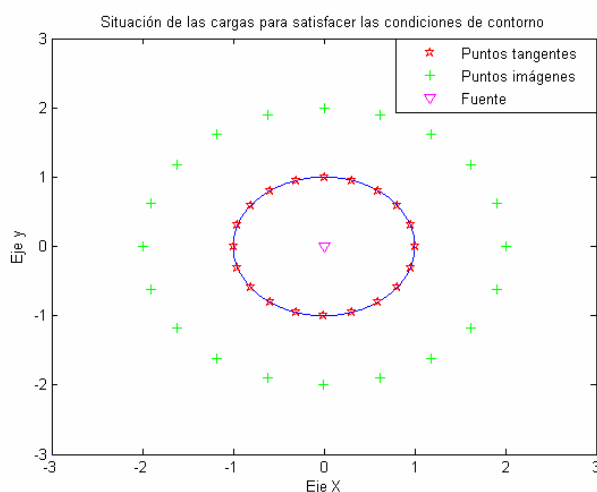


Figura 3.17 Situación 20 cargas imagen ubicación circular. Fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

Comprobamos como en este caso la ubicación de las cargas imagen coincide con la ubicación de las imágenes con el método inicial. No obstante es en la variación del radio donde radica la potencia de este método de optimización.

A priori no podemos conocer que valor del radio será el que proporcione un coste mínimo. Por esta razón, representamos el coste en función del radio, variando el mismo entre 1 y 7600 aproximadamente (es decir un rango muy amplio, con un paso de valores entre radio ‘grueso’, para obtener así una primera aproximación)

De esta forma, obtenemos una variación del error en función del radio de:

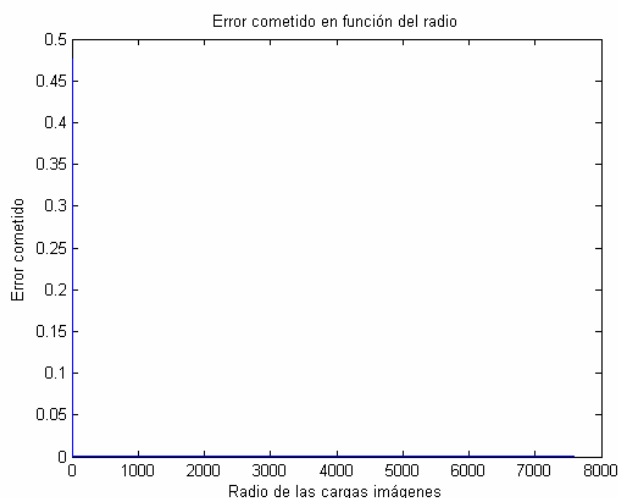


Figura 3.18 Coste en función del radio (0-8000). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$.

En la figura 3.18, observamos que el error “converge” a un determinado valor (distinto de 0) a una distancia no muy lejana del cilindro, por lo que un análisis hasta valores de radio tan amplios, además de tener un coste computacional muy elevado, no proporciona ninguna información adicional.

Por tanto limitaremos el valor máximo del radio a un valor más reducido, por ejemplo de 11λ , obteniendo un resultado de error frente al radio de:

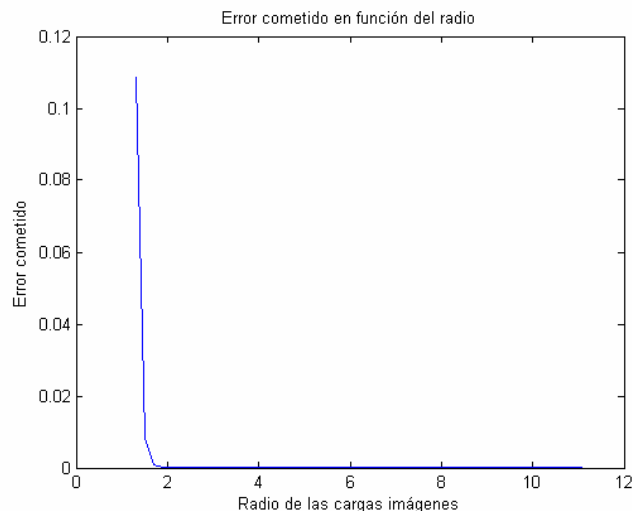


Figura 3.19 Coste en función del radio (0-11). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$.

Observamos en la figura 3.8 como el error aumenta cuanto más cerca está la carga del cilindro, descendiendo hasta valores menores de error conforme situamos el radio a una mayor distancia. Comprobamos como para la ubicación original (en la que el radio era igual a 2λ) el coste ya es muy reducido, no obstante con un aumento del radio obtendremos costes todavía menores, como podemos comprobar en la figura 3.9:

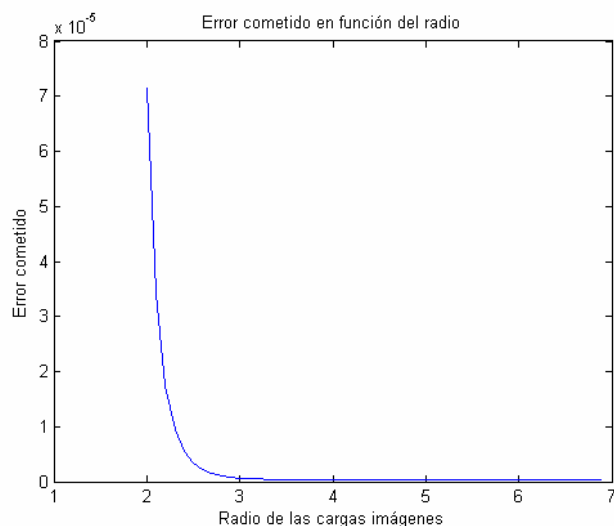


Figura 3.20 Coste en función del radio (2-7). 20 imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$.

Así, hemos obtenido una reducción del coste más que notoria, pasando de un error de $7.1487 \cdot 10^{-5}$ a uno de $2.7080 \cdot 10^{-7}$, sin más que emplear un radio de las cargas imágenes de valor 7λ .

También indicar que el error converge, aunque en este caso al estar situada la carga en el origen la convergencia se daría teóricamente en el infinito.

Para un caso general, emplearemos dos veces esta técnica:

- En primer lugar, emplearemos un paso “grueso”, variando el radio entre 1.000001λ y 30λ , con paso de 0.1λ . Se han escogido estos valores debido a que en 30λ ya obtenemos una convergencia en todos los casos probados, y en aquellos en los que la teoría muestra una convergencia en el infinito, la diferencia del coste obtenido con ese radio y otro muy superior es mínima. Proporcionará un valor óptimo del radio para esta simulación, r_{opt} .
- En segundo lugar, emplearemos un paso “fino”, variando el radio muy cerca de la posición óptima anterior, r_{opt} , concretamente nos moveremos en el entorno: $[(r_{opt} - 0.1\lambda), (r_{opt} + 0.1\lambda)]$, con un paso de 0.001λ . Así obtendremos una posición del radio óptimo mucho más precisa, minimizando el coste.

Así, para el ejemplo en el que estábamos inmersos, obtenemos unas variaciones del coste en función del radio de:

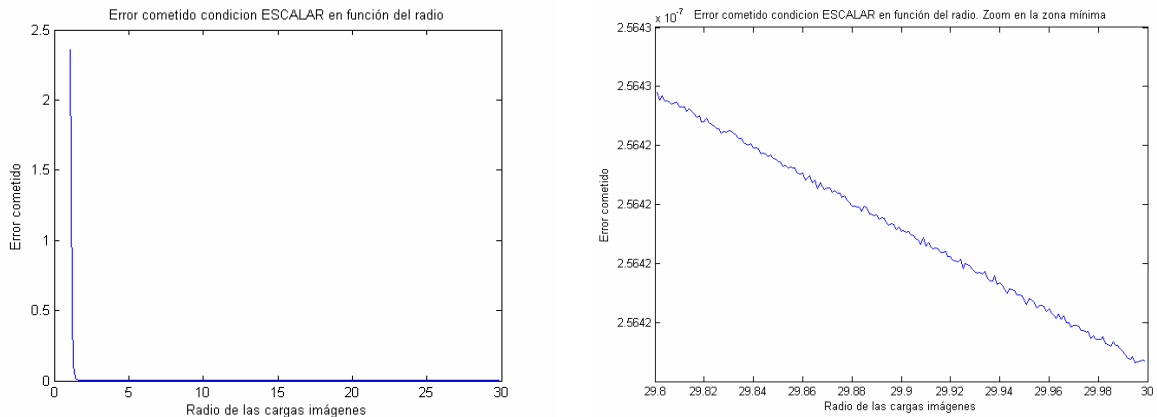


Figura 3.21 Coste en función del radio, paso grueso y fino. 20 imágenes y fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

Conseguimos obtener de esta forma un Coste mínimo de $2.5641 \cdot 10^{-7}$. Comprobamos como se ha reducido mucho respecto al coste del método normal, pero no ha habido una reducción brusca respecto al caso del radio con 7λ .

De esta forma podemos concluir:

- El error aumenta si situamos las cargas imágenes muy cerca de los bordes cilindro.
- El error va disminuyendo conforme aumentamos el radio del círculo de cargas imágenes, obteniéndose una convergencia en el error teórica en este caso en el infinito.

No obstante, el caso de que el ‘Coste’ converja conforme aumentamos el valor del radio, es solo uno de los dos casos posibles. Existe otro caso en el que una vez que obtenemos un radio óptimo, el coste vuelve a aumentar conforme aumentamos el valor del radio, convergiendo a otro coste (que es superior al mínimo).

Supongamos por ejemplo la misma situación que hemos estado analizando hasta ahora, pero empleando un total de 10 cargas imágenes. La variación del coste en función del radio será:

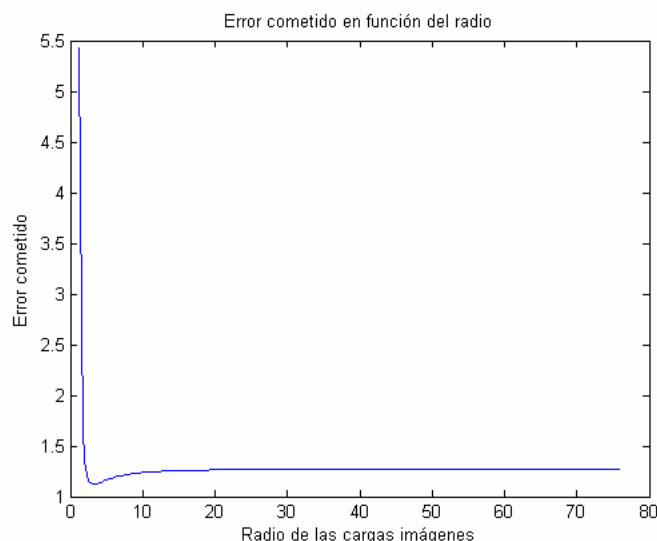


Figura 3.22 Variación del coste con el radio variable (0-80). 10 cargas imágenes, fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

Comprobamos como existe un mínimo del coste en un “radio óptimo”, que en este caso es de valor 3.1λ . Al aumentar todavía más el radio, el coste aumenta convergiendo a un valor superior.

Realizaremos una comparación entre el coste obtenido por el método definido en el Capítulo 2 (que en la gráfica llamaremos ‘método actual’) y el coste obtenido con la variación del radio, para dos situaciones de fuente [concretamente, cuando la fuente se encuentra situada en $(0.4\lambda, 0\lambda)$ y $(0.5\lambda, 0\lambda)$] y al utilizar 15 cargas imágenes:

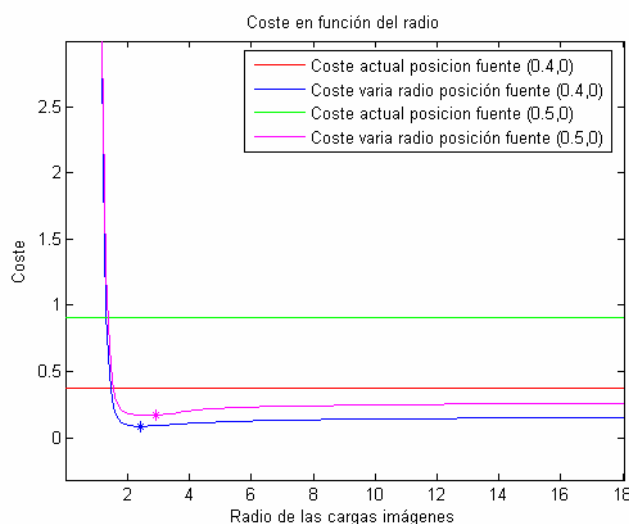


Figura 3.23 Comparativa costes método original y variación de radio

Observamos como el coste obtenido es significativamente menor para un radio ‘óptimo’ y que oscila entre valores de coste superiores o inferiores en función del radio que tomemos para realizar el cálculo del potencial escalar.

Finalmente, y para terminar con nuestra comparativa vamos a mostrar de forma simultánea el potencial escalar alrededor del cilindro en función del ángulo, tanto para el caso original como para el caso de la variación de radio. Para ver más claramente la diferencia, mostraremos el coste en unidades logarítmicas:

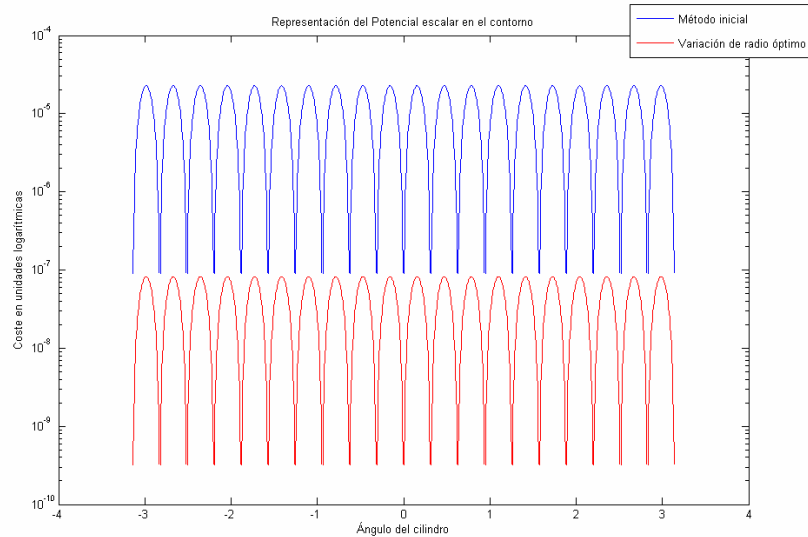


Figura 3.24 Potencial escalar en el contorno, métodos original y variación de radio. Fuente situada en el origen y 20 imágenes

Comprobamos como la distribución del potencial escalar en el contorno sigue siendo simétrica (pues la fuente está centrada en el origen), pero obtenemos un valor absoluto mucho menor que en el método original, para cualquier ángulo del cilindro. Así queda demostrada la efectividad del método y como logra reducir el error de la aproximación del potencial escalar.

Mostraremos a continuación, al igual que hicimos anteriormente, cual es el valor final del coste obtenido en este método en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$. Marcaremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto a la ubicación inicial de cargas imágenes; también indicaremos el valor del radio óptimo que hemos obtenido en cada uno de los casos.

- a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas		5	10	15	20	25	30
Tipo Técnica							
Point-matching		10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006	3.07174e-008
Variación del radio	Error	9.6952	1.1228	0.0013	2.6108e-007	1.3858e-011	2.7904e-014
	Radio	1.400 λ mínimo local	3.100 λ mínimo local	11 λ converge	11 λ converge	11 λ converge	4 λ converge

Tabla 3.8 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

Comprobamos como obtenemos un resultado mejor que el método original en todos los casos, con reducciones del coste muy importantes.

Vamos a analizar el caso particular de emplear 5 imágenes, donde obtenemos un radio óptimo de valor 1.4λ . Para valores de radio superiores, el coste converge a un valor muy superior al coste mínimo, como podemos observar en la figura 3.12:

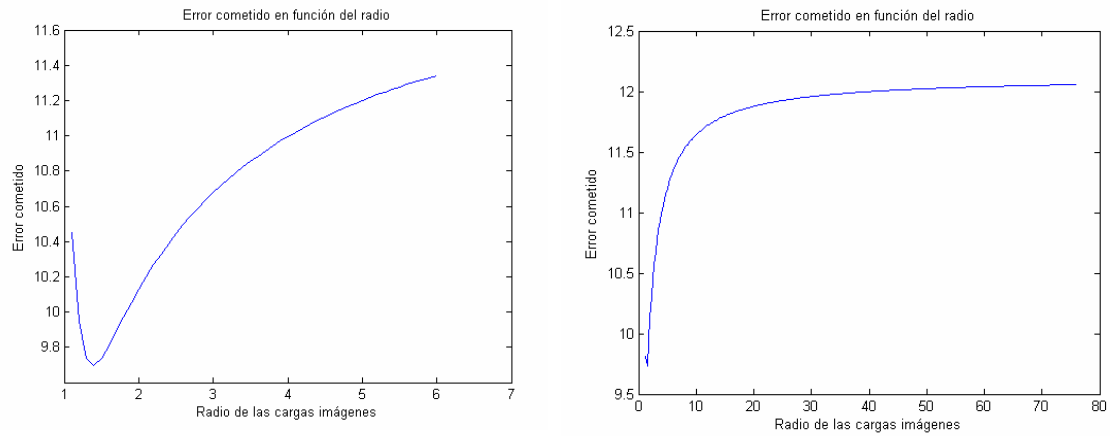


Figura 3.25 Variación del coste con el radio, 5 imágenes y fuente en el origen.

- *b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº cargas		5	10	15	20	25	30
Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	4.0841e-008
Variación del radio	Error	10.9688	3.2548	0.0352	3.8533e-005	4.9440e-007	1.9817e-008
	Radio	1.200 λ mínimo local	5.200 λ mínimo local	2.400 λ converge	4.400 λ converge	2.500 λ converge	16.000 λ converge

Tabla 3.9 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

Comprobamos como en este caso también mejoramos el resultado respecto a la técnica original en todos los casos. Resaltaremos un caso particular, que se produce cuando empleamos cargas imágenes, en el que aparecen dos mínimos uno local y otro absoluto, como se puede comprobar en la figura 3.13. Una primera variación del radio puede llegar a creer que el primer mínimo local que nos encontramos (entorno a 1.7λ) es al absoluto, pues el coste vuelve a crecer tras pasarlo. Aquí se resalta la utilidad de emplear un barrido con dos pasos, el paso “grueso” que ha detectado ese mínimo local continúa con la variación de los radios en su rango buscando otros valores más pequeños. Por su parte un barrido más “fino” empleado directamente en este caso, al detectar que el coste aumenta al superar un determinado valor de radio, daría al mínimo local del coste como mínimo absoluto, deteniendo el algoritmo.

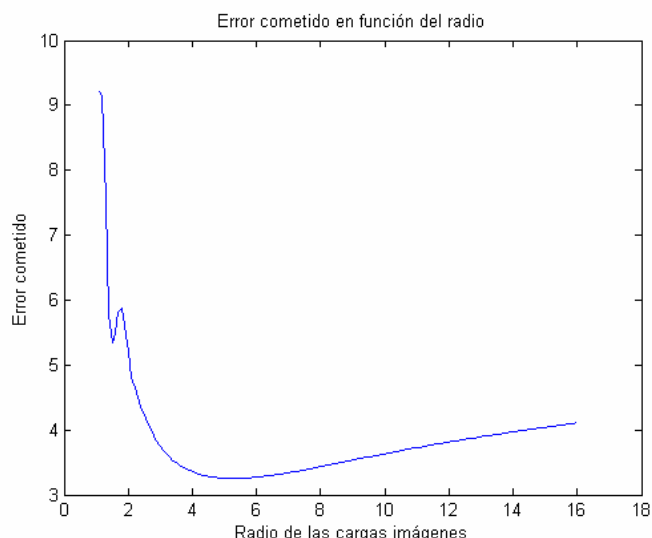


Figura 3.26 Coste en función del radio. 10 cargas imágenes y fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- c) Posición $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	4.6492e-007
Variación del radio	Error	10.3919	6.8724	0.0862	5.8839e-004	1.8230e-005	3.2894e-007
	Radio	1.200 λ mínimo local	4.400 λ mínimo local	2.400 λ converge	2.300 λ converge	2.000 λ converge	2.000 λ converge

Tabla 3.10 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

- d) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		26.6829	23.6945	1.4449	0.0132	2.8172e-004	2.5517e-005
Variación del radio	Error	11.1007	9.1644	0.2953	0.0256	0.0019	6.2641e-004
	Radio	1.200 λ mínimo local	1.200 λ mínimo local	2.900 λ converge	16 λ converge	1.700 λ converge	1.800 λ converge

Tabla 3.11 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

Comprobamos como en esta posición hay tres casos en los que una variación del radio no proporciona un coste menor que el original. Esto se produce para un número de imágenes relativamente elevado (20-30) cuando el error ya es reducido. Destacamos la utilidad del método para reducir de forma muy importante el coste para un número de imágenes más reducido, en algunos casos de forma espectacular (5-10 imágenes).

- *e) Posición $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		17.9904	19.9656	0.9056	0.0070	9.6659e-005	3.7540e-006
Variación del radio	Error	10.1965	8.5877	0.1721	0.0047	2.4757e-004	9.1774e-006
	Radio	1.200 λ mínimo local	1.200 λ mínimo local	2.900 λ converge	1.900 λ converge	1.800 λ converge	1.800 λ converge

Tabla 3.12 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$

- *f) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371
Variación del radio	Error	24.2562	20.4576	11.5060	11.9342	8.1999	8.5931
	Radio	1.1000 mínimo local	1.0900 mínimo local	1.0600 mínimo local	1.4300 converge	1.0400 mínimo local	1.1300 minimo local

Tabla 3.13 Coste variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Podemos observar como en casi todos los casos obtenemos un coste mucho menor que con la técnica original, exceptuando claramente la posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$. En este caso, la carga fuente se encuentra muy próxima a la pared del cilindro, por lo que produce un pico de potencial en ella que las cargas imágenes de nuestro método, al estar situadas de forma simétrica alrededor del cilindro, no pueden contrarrestar. No obstante, si la carga se encuentra cerca de la pared del cilindro ($\approx 0.9\lambda$) otras técnicas se muestran mejores que con la anterior ubicación, especialmente al emplear un número reducido de cargas imágenes.

El error se disminuye de una forma más drástica cuando el número de cargas imágenes es reducido (ó el coste inicial de partida muy elevado) y de una forma más moderada cuando el número de cargas imágenes es más elevado.

En cuanto al efecto del radio en el coste, hemos comprobado que siempre se va a producir un coste mínimo, que puede o no coincidir con el coste al que converge cuando el radio aumenta mucho su valor (es decir, si el coste mínimo es el valor de convergencia o es un mínimo absoluto que se presenta anteriormente).

Como principal desventaja de este método, señalaremos que *el coste computacional para conseguir los resultados es relativamente alto*, pues debemos calcular los potenciales para un gran número de situaciones y obtener el Coste para cada uno de ellos (operación computacionalmente costosa).

Para concluir, podemos considerar *la técnica como muy satisfactoria* pues es muy efectiva en la gran mayoría de los casos, simple y fácilmente extensible a una geometría arbitraria.

3.2.5 Optimización por descenso de gradiente de las cargas

3.2.5.1 Desarrollo teórico

Este método se basa en modificar el valor complejo de las cargas imágenes con el fin de optimizarlo, para poder conseguir así un coste mínimo.

Tras resolver el sistema de ecuaciones definido en la ecuación 3.1 ó 3.4 (que son la misma), obtenemos un conjunto de N valores complejos, uno para cada carga ‘ q_x ’ imagen. Con estos valores complejos de las cargas calcularemos el potencial escalar en el interior del cilindro (o la estructura arbitraria que hayamos definido), como estudiamos de forma detallada en el Capítulo 2.

Por tanto deberemos de optimizar el valor de las cargas (que es una magnitud compleja) empleando para ello un método de descenso de gradiente. Es necesario definirnos de forma adecuada un Coste a optimizar (que no tiene porqué coincidir con el coste de la aproximación del potencial escalar definido en la ecuación 3.3) que nos dará el valor de las cargas buscado en cada iteración.

En general, una optimización por descenso de gradiente sigue la estructura:

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k) \quad (3.27)$$

Para nuestro caso, vamos a optimizar el valor complejo de las cargas, por lo cada término de la ecuación se refiere a:

- $\bar{w}(k+1) \rightarrow$ Valor complejo de las cargas en la iteración $k+1$, es decir son los nuevos pesos que estamos calculando. Es una matriz columna de pesos complejos, que tendrá como dimensión el número de imágenes empleadas.
- $\bar{w}(k) \rightarrow$ Valor complejo correspondiente a las cargas en la iteración k , es decir, en la iteración anterior a la que estamos calculando. Se trata de una matriz columna de pesos complejos.
- $\mu \rightarrow$ Constante de paso.
- $\nabla_{\bar{w}} C(k) \rightarrow$ Gradiente de la función de Coste en la iteración k -ésima.

Por tanto la ecuación que estamos definiendo en 3.27 puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ \dots \\ q_{N-1}(k+1) \\ q_N(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ \dots \\ q_{N-1}(k) \\ q_N(k) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} C(k) \\ \frac{\partial}{\partial q_2} C(k) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial q_{N-1}} C(k) \\ \frac{\partial}{\partial q_N} C(k) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

A la hora de implementar el algoritmo, partiremos de unos pesos $\bar{w}(k)$, que no serán aleatorios, sino que tendrán un valor relativamente cercano al óptimo [y que son proporcionados por el cálculo de ‘q_k’ mediante el Point-Matching].

Será por tanto necesario calcular una función de Coste que sea derivable en función de las cargas complejas.

Para ello realizaremos dos versiones:

a) Función de coste original

La función de Coste tal y como la habíamos obtenido anteriormente (pero sin considerar el valor absoluto), será:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} Gv_{cy} dc \quad (3.29)$$

Para poder implementar el algoritmo, necesitamos calcular el gradiente del coste, que se traduce en una derivada parcial respecto a cada una de las cargas.

Realizaremos el desarrollo para una carga arbitraria, ‘p’:

$$\nabla_{wp} C_{oste} = \nabla_{wp} \int_{\text{Contorno}} Gv_{cy} dc = \int_{\text{Contorno}} \nabla_{wp} Gv_{cy} dc \quad (3.30)$$

y como:

$$\nabla_{wp} Gv_{cy} = \frac{d}{dq_p} \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] = Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) \quad (3.31)$$

Por lo que finalmente, y teniendo en cuenta todos los elementos, tendremos:

$$\nabla_{\bar{w}} C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_w) dc \quad (3.32)$$

Aquí encontramos el problema de que, el gradiente del coste no depende de los pesos empleados, por lo que siempre realizará la misma actualización de las cargas independientemente de lo acontecido en la iteración anterior, lo que nos llevaría a un resultado erróneo. Además, la definición del coste es ligeramente diferente a la de la ecuación 3.3 y una minimización del coste 3.8 no tiene porqué minimizar el coste definido en 3.3 (ya que al desaparecer el valor absoluto pueden darse casos en los que se cancelen varios sumandos de distinto signo).

Es por todas estas razones por la que este resultado no es adecuado para el cálculo del gradiente del coste.

b) Función de coste cuadrática conjugada

En este punto definiremos el coste a optimizar como la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de Green en el contorno de la estructura, tal y como observamos en la ecuación 3.33:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} |Gv_{cy}|^2 dc \quad (3.33)$$

De esta forma optimizaremos también el coste definido en la ecuación 3.3, pues la optimización de una función al cuadrado también optimiza la función original. Además, observamos que al ser la función de Green un número complejo, se verifica la relación:

$$|Gv_{cy}|^2 = Gv_{cy} \cdot Gv_{cy}^* \quad (3.34)$$

Donde la notación Gv_{cy}^* implica el número complejo conjugado de Gv_{cy} .

De esta forma podemos desarrollar la ecuación 3.33 teniendo en cuenta la definición del potencial escalar Gv_{cy} :

$$\begin{aligned} C_{oste} &= \int_{\text{Contorno}} |Gv_{cy}|^2 dc = \int_{\text{Contorno}} Gv_{cy} \cdot Gv_{cy}^* dc = \\ &= \int_{\text{Contorno}} \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right]^* dc \end{aligned} \quad (3.35)$$

Recordando igualdades de variable compleja sencillas,

$$\begin{aligned} (a+b)^* &= a^* + b^* \\ (ab)^* &= a^* \cdot b^* \end{aligned} \quad (3.36)$$

podemos desarrollar la ecuación 3.35 con el fin de expresarla en sus términos constituyentes:

$$\begin{aligned} C_{oste} &= \int_{\text{Contorno}} \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right]^* dc = \\ &= \int_{\text{Contorno}} \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* + \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] dc = \\ &= \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* + \right. \\ &\quad \left. + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \right) dc \end{aligned} \quad (3.37)$$

En este punto ya tenemos definido el Coste que vamos a optimizar mediante la técnica de gradiente descendente. Tal y como comentamos anteriormente, una vez definido el Coste, deberemos obtener su gradiente, que en la práctica se reduce a

obtener la derivada del coste definido en la ecuación 3.37 respecto a cada una de las cargas imagen que hayamos definido en nuestro problema (en general, será un número N).

Al ser el valor de las cargas complejos, el gradiente que deberemos obtener será de la forma:

$$\nabla_q C(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Re}(q_1)} + j \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Im}(q_1)} \\ \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Re}(q_2)} + j \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Im}(q_2)} \\ \dots \\ \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Re}(q_N)} + j \frac{\partial C(q)}{\partial \text{Im}(q_N)} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Calcularemos en este punto la derivada parcial del coste respecto a una carga compleja arbitraria ‘p’:

$$\nabla_{q_p} C_{\text{oste}} = \frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* + \right. \\ \left. + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \right) dc \quad (3.39)$$

Esta derivada la descompondremos en sus términos constituyentes:

- En primer lugar, la ecuación 3.40 es nula debido a que el valor de la función de Green en dos puntos cualesquiera no va a depender nunca del valor complejo de una carga ‘p’.

$$\frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* dc = 0 \quad (3.40)$$

- El segundo término no se anulará, pues sí que depende del valor complejo de la carga ‘p’. No obstante, en este caso, deberemos realizar la derivada respecto a una variable compleja (‘q_p’) tal y como definimos en la ecuación 3.41:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* dc &= \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* = \\ &= \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} q_p^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* = \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} (q_{pr} - jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* = \\ &= \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial q_{pr}} (q_{pr} - jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* + j \frac{\partial}{\partial q_{pi}} (q_{pr} - jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* \right] dc = \\ &= \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* \end{aligned} \quad (3.41)$$

- El desarrollo del tercer término se anula, como podemos comprobar en la ecuación 3.42

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) dc = \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} q_p Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) = \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} (q_{pr} + jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial q_{pr}} (q_{pr} + jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) + j \frac{\partial}{\partial q_{pi}} (q_{pr} + jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) \right] dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \frac{1}{2} \cdot [Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) - Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)] = 0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

○ El cuarto término será el más complejo de analizar, resultado:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] dc = \\
 & \frac{\partial}{\partial q_p} \int_{\text{Contorno}} \left[\sum_{k=1}^K (q_{kr} + q_{ki}) Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K (q_{kr} - q_{ki}) Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left(\left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \cdot \frac{\partial}{\partial q_p} [(q_{pr} + j \cdot q_{pi}) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)] + \right. \\
 & \left. \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \frac{\partial}{\partial q_p} [(q_{pr} - j \cdot q_{pi}) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^*] \right) dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left(\left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial q_{pr}} (q_{pr} + j \cdot q_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) + j \frac{\partial}{\partial q_{pi}} (q_{pr} + jq_i) Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial q_{pr}} (q_{pr} - j \cdot q_i) Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_p) + j \frac{\partial}{\partial q_{pi}} (q_{pr} - jq_i) Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_p) \right] \right) dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left(\left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \frac{1}{2} [Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_p) - Gv^*(\bar{r}, \bar{r}_p)] \right) dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) dc
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Una vez analizados los cuatro términos en los que habíamos descompuesto la ecuación 3.39 vamos a recomponerlos con el fin de obtener una expresión para el gradiente del Coste:

$$\nabla_{q_p} C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right]^* \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p) \right) dc \tag{3.44}$$

De esta forma ya podremos emplear el algoritmo por descenso de gradiente, pues tenemos calculado el gradiente del coste.

Debido a la complejidad de las expresiones con la que estamos tratando, el coste computacional de su evaluación no es despreciable, no obstante vamos a tratar de reducirlo empleando dos técnicas de forma simultánea:

➤ Ajuste dinámico del paso ' μ ' (definido en la ecuación 3.6)

En primer lugar, al comenzar con la ejecución del algoritmo emplearemos un valor de paso ' μ ' relativamente elevado, con el fin de que reduzcamos el coste lo máximo posible en cada iteración. En caso de que al emplear este paso no obtengamos una reducción, sino que el coste aumente, reduciremos el valor de ' μ ' y volveremos a repetir la iteración viendo si ahora el coste se reduce. De esta forma, empezaremos el algoritmo con un paso más “grueso” que se reducirá conforme nos vayamos acercando hacia la convergencia del coste, donde el paso automáticamente tendrá un valor más “fino”.

➤ Detención dinámica del algoritmo con un criterio de convergencia

Definiremos un criterio de parada del algoritmo cuando en las 15 últimas iteraciones el coste obtenido no difiera entre sí más de un 0.01%, detectando así que el coste se ha estabilizado y deteniendo el algoritmo de forma automática, minimizando por tanto el coste computacional.

De esta forma ya tenemos totalmente definido nuestro algoritmo de gradiente descendente: Hemos calculado el gradiente de su error, tenemos unos valores complejos de carga de partida y hemos definido unos criterios dinámicos de gestión del paso y de detención del algoritmo.

La técnica empleada obtendrá un valor complejo de las cargas que nos proporcionen un mínimo local en la función de Coste, consiguiendo así una mayor precisión en las funciones de Green para calcular el potencial escalar que en el caso original estudiado en el Capítulo 2. Es interesante el estudio de la convergencia del algoritmo, en función tanto de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro como de la posición de las cargas imágenes. El algoritmo se mostrará efectivo cuando la situación inicial de la que partamos esté cerca de un mínimo local de la función coste.

La distribución de las cargas no afecta al funcionamiento del método pero sí que influye en la forma en el que éste puede alcanzar sus resultados. Una distribución de cargas empleando planos simétricos partirá de una situación mucho más genérica que una distribución de cargas imagen circular que se haya sometido a una optimización de su radio, pues ya estaremos muy cerca de un mínimo local y el margen de mejora posible es más reducido.

En función del número de cargas imágenes empleadas, el método se muestra más efectivo para un número no muy elevado de las mismas (10-20), pues deja un mayor margen de variación del valor de las cargas.

En cuanto al coste computacional del algoritmo, éste se reduce de forma considerable mediante una gestión dinámica del paso de actualización y de la detención del algoritmo, siendo casi despreciable en el caso de que nos encontremos en un punto de partida cercano a un mínimo local.

Señalar finalmente que la técnica de gradiente descendente no está sujeta en ningún momento a estructura geométrica de la cavidad a analizar, y aunque partamos del caso del cilindro, los desarrollos son directamente extensibles a cualquier otra geometría.

3.2.5.2 Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos muestran como el método propuesto es eficaz principalmente cuando el número de cargas empleadas no es muy elevado.

Vamos a desarrollar un caso particular para comprobar el funcionamiento del método, mostrando posteriormente los resultados para una gran cantidad de posiciones de la fuente en el interior del cilindro y de número de imágenes.

Supongamos un cilindro de radio $a = \lambda$, en el que está situada una carga origen en la posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$ y sobre la que situamos 10 cargas imágenes para satisfacer las condiciones de contorno. La situación la podemos observar en la figura 3.27:

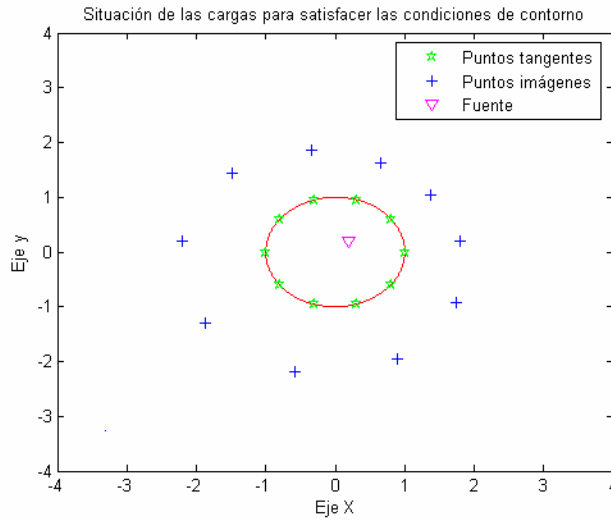


Figura 3.27 Situación con 10 imágenes y fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

En este caso el error de la aproximación del potencial escalar es de:

$$Error = 16.5825$$

Podemos observar la distribución del potencial escalar en el contorno del cilindro, comprobando como tenemos 10 nulos (correspondientes a las 10 condiciones impuestas) y como el valor entre estos nulos tiene valores relativamente elevados:

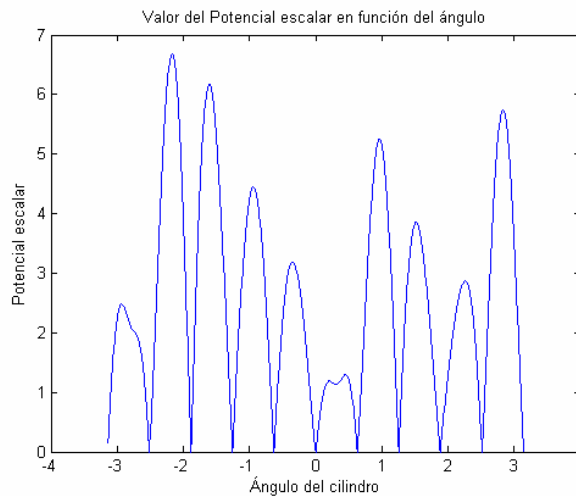


Figura 3.28 Representación Potencial escalar en función del ángulo. 10 imágenes y fuente en origen

Destacamos la falta de simetría de la representación, debido a que la fuente no se encuentra centrada en el interior del cilindro.

Sobre esta configuración vamos a emplear la optimización por descenso de gradiente, obteniendo una reducción del coste en función del número de iteración mostrada por la figura 3.29:

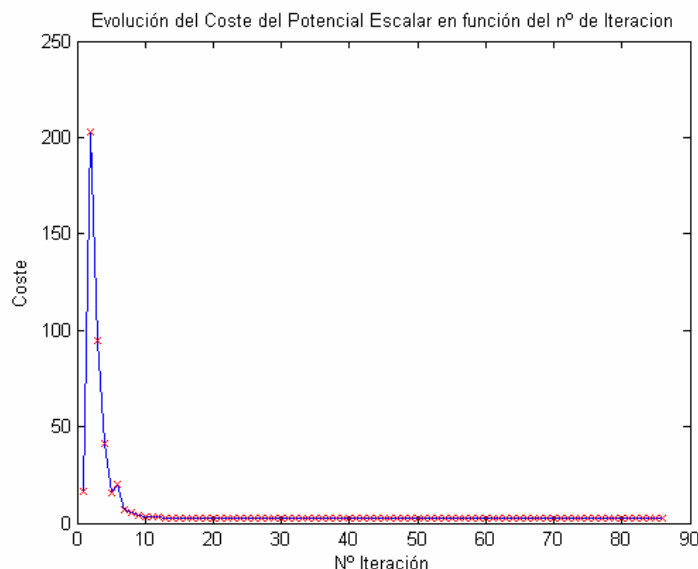


Figura 3.29 Evolución del Coste en función del número de iteración, paso dinámico. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en la posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

Comprobamos como en la figura anterior obtenemos un coste mínimo en un número de iteraciones relativamente reducido (hemos esperado convergencia de un 0.01% en las últimas 15 iteraciones para dar por finalizado el algoritmo).

Si hubiéramos escogido un paso menor y fijo, el resultado final hubiera sido el mismo, pero habríamos necesitado un número de iteraciones muy superior, como muestra la figura 3.30:

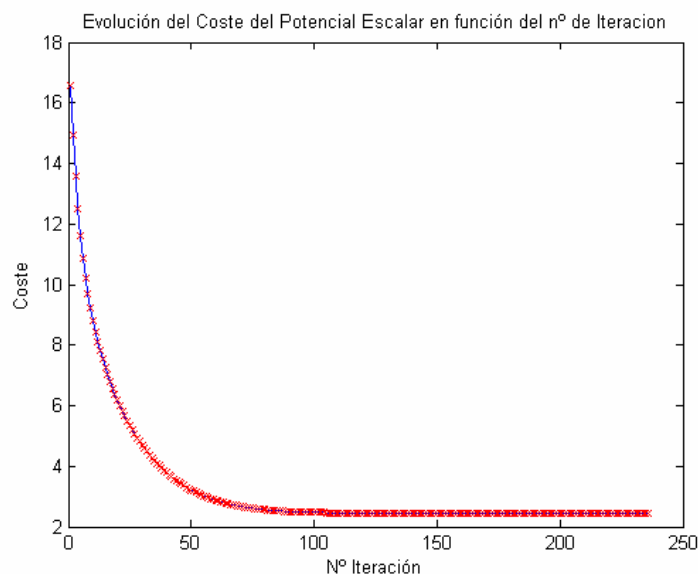


Figura 3.30 Evolución del Coste en función del número de iteración, paso fijo. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en la posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

De esta forma conseguimos un error final de valor:

$$Error = 2.4473$$

Observamos como hemos obtenido una reducción del error muy importante, con un coste computacional moderado.

Veamos ahora la distribución del potencial escalar en el contorno del cilindro:

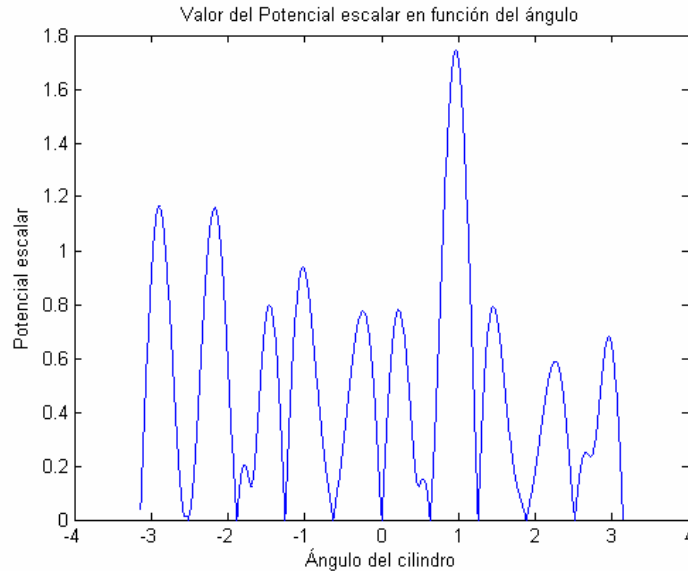


Figura 3.31 Representación Potencial escalar en función del ángulo tras optimizar el valor complejo de las cargas. Empleo de 10 imágenes y fuente situada en el origen

Podemos comprobar como los valores sobre los que nos movemos son mucho más reducidos, manteniéndose básicamente los 10 nulos provocados por las 10 condiciones de las cargas (aunque esto no tiene porqué ser así). En general, el nuevo potencial escalar alrededor del cilindro tras optimizar el valor complejo de las cargas no tiene porqué guardar ninguna relación con el original, salvo descensos acusados (que no nulos) en las puntos tangentes del cilindro donde impusimos las condiciones de contorno.

Mostraremos a continuación cual es el valor final del coste obtenido en este método en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$. Indicaremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto al valor inicial de cargas imágenes.

- *a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006	3.07174e-008
Optimización del valor de las cargas	10.12939	0.898036	3.85533e-003	4.549699E-005	8.63487e-007	1.9519e-008

Tabla 3.14 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$

- *b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	1.204944e-007
Optimización del valor de las cargas	10.7727	2.44732	0.08024	4.40864e-004	4.54379e-006	8.99507e-008

Tabla 3.15 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- *c) Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	5.137437e-007
Optimización del valor de las cargas	11.2488	3.734492	0.300117	2.0126e-003	2.03818e-005	4.24563612e-007

Tabla 3.16 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

- *c) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	26.6829	23.6945	1.4449	1.320842e-002	2.8172e-004	2.55236e-005
Optimización del valor de las cargas	10.3198	7.17198	0.97371	9.925287e-003	2.6741e-004	2.55235e-005

Tabla 3.17 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

- d) Posición $(0.5\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	17.9904	19.9656	0.9056	0.00700	9.6659e-005	3.77679e-006
Optimización del valor de las cargas	12.0109	5.811915	0.66110031	0.005482	7.816235e-005	3.766583e-006

Tabla 3.18 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$

- e) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371
Optimización del valor de las cargas	22.6211220	8.03442	1.57554	4.214055	0.45094	1.137081

Tabla 3.19 Coste optimizando cargas para distintos nº de imágenes, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Una vez analizado el comportamiento del algoritmo, podemos extraer algunas conclusiones acerca de sus resultados:

- El método siempre proporcionará resultados con un coste igual o inferior al coste que teníamos de partida (antes de optimizar las cargas).
- Observamos como los resultados obtenidos son bastante satisfactorios, obteniendo una reducción del coste muy significativa cuando empleamos un número no muy elevado de imágenes y la carga fuente no está muy próxima al borde del cilindro.
- El algoritmo consigue mejores resultados cuando el número de cargas empleadas no es muy elevado: la explicación de este comportamiento es que al aumentar el número de cargas, estas van proporcionando costes cada vez más pequeños dejando un menor margen de mejora. Además, el tener que optimizar de forma simultánea un gran número de cargas hace que sea más probable caer en un mínimo local (pues la existencia de éstos, al haber más cargas, es más probable).
- Si la fuente se encuentra pegada al contorno de la cavidad, las cargas imágenes no pueden contrarrestar el pico de potencial escalar producido por la carga fuente, por lo que la optimización de su valor complejo no da resultados válidos.

- Como principal desventaja, indicaremos que presenta un coste computacional relativamente elevado, aunque es controlado con la gestión dinámica del paso de actualización y la detención automática del algoritmo al llegar a la convergencia.

3.2.6 Optimización por descenso de gradiente de las posiciones

3.2.6.1 Desarrollo teórico

Este método se basa en modificar las posiciones de las cargas imagen, con el fin de optimizarlas para obtener de esta forma un coste mínimo.

Al resolver el sistema de ecuaciones definido en la ecuación 3.1 ó 3.4 (que son la misma), obtenemos un conjunto de N soluciones complejas con las que podemos recomponer el potencial en el interior de la estructura a analizar. Para el planteamiento de este sistema, habíamos supuesto unas posiciones conocidas de las cargas imagen (como por ejemplo, situarlas de forma especular a un plano tangente a cada punto del cilindro).

En este método se propone optimizar la posición de las cargas imagen (en sus ejes 'x' e 'y') de tal forma que las nuevas posiciones de las cargas calculadas proporcionen un coste mínimo. Para el cálculo de estas nuevas posiciones emplearemos un método de descenso de gradiente, de forma similar al utilizado para optimizar los valores complejos de las cargas. No obstante, en este caso los valores a optimizar son reales (y no complejos como el valor de las cargas) y además se deben optimizar dos parámetros de forma conjunta (las posiciones en el eje 'x' y en el eje 'y').

La actualización de las posiciones de cada imagen se realizará mediante la conocida fórmula del gradiente descendente:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \bar{x}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k) \\ \bar{y}(k+1) &= \bar{y}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k)\end{aligned}\tag{3.45}$$

Donde:

- $\bar{x}(k+1), \bar{y}(k+1) \rightarrow$ Posiciones que estamos calculando para cada una de las cargas en una nueva iteración (k+1). Trataremos todas las posiciones de forma conjunta, siendo ' \bar{x} ' e ' \bar{y} ' vectores columna de dimensión N (es decir, el número de cargas existentes).
- $\bar{x}(k), \bar{y}(k) \rightarrow$ Posiciones de cada carga en la iteración anterior (k), que nos sirve de partida para obtener las posiciones en la iteración actual.
- $\mu \rightarrow$ Constante de paso.
- $\nabla_{\bar{w}} C(k) \rightarrow$ Gradiente de la función de Coste.

De esta forma, partiendo de unas posiciones iniciales (que serán proporcionadas por el método de las imágenes especulares a una recta tangente, expuesto en el capítulo 2) el algoritmo irá evolucionando encontrando aquellas posiciones para las cargas

imagen que minimicen el coste. Para completar el algoritmo, será necesario definirnos un Coste derivable respecto a las posiciones; presentaremos dos versiones similares a las mostradas en la optimización de las cargas.

a) Función de coste original

La función de Coste tal y como la habíamos obtenido anteriormente (pero sin considerar el valor absoluto), será:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} Gv_{cy} dc \quad (3.46)$$

Para poder implementar el algoritmo, necesitamos calcular el gradiente del coste, que se traduce en una derivada parcial respecto a la posición 'x' e 'y' de todas las cargas imagen. Al ser ambas derivadas muy similares, realizaremos los cálculos para la posición 'x' de las cargas, extendiendo de forma natural su resultado a las posiciones 'y'.

Realizaremos el desarrollo para posición arbitraria x':

$$\nabla_{x_i} C_{oste} = \nabla_{x_i} \int_{\text{Contorno}} Gv_{cy} dc = \int_{\text{Contorno}} \nabla_{x_i} Gv_{cy} dc \quad (3.47)$$

De donde:

$$\nabla_{x_i} Gv_{cy} = \frac{d}{dx_i} \left[Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) + \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] = q_i \frac{d}{dx_i} Gv(\bar{r}, \bar{r}_i) \quad (3.48)$$

En este punto observamos que es necesario realizar la derivada de la función de Green respecto a la posición 'x_i'. En primer lugar, partimos de la distancia euclídea entre dos puntos:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

Y obtendremos su derivada respecto a la posición x' de una carga arbitraria:

$$\begin{aligned} \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx'} &= \frac{d \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{dx'} = \frac{1}{2} \cdot \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 2(x - x') \cdot (-1) = \\ &= \frac{x' - x}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = \frac{x' - x}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, podemos realizar la derivada de la función respecto de la posición x' de una carga arbitraria, basándonos en los resultados parciales anteriores:

$$\begin{aligned}
 \frac{dGv}{dx'} &= \frac{d}{dx'} \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{-j \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx'} \cdot |\bar{r} - \bar{r}'| - \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx'} \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} = \\
 &= \frac{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'| \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot \frac{x' - x}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot \frac{x' - x}{|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} = \\
 &= \frac{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'| \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (x' - x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (x' - x)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (x' - x) \cdot (-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'| - 1)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \\
 &= \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Para el caso dual, respecto a la posición y' obtenemos un resultado similar:

$$\frac{dGv}{dy'} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (y - y') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \tag{3.52}$$

De esta forma, podemos reconstruir la ecuación 3.27 obteniendo el gradiente del coste que emplearemos para optimizar las posiciones 'x' de las cargas imagen:

$$\nabla x_i C_{oste} = q_i \cdot \int_{\text{Contorno}} \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dc \tag{3.53}$$

El gradiente del coste empleado para optimizar las posiciones 'y' de las cargas imagen se obtiene de una forma totalmente dual, resultando:

$$\nabla y_i C_{oste} = q_i \cdot \int_{\text{Contorno}} \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot (y - y') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dc \tag{3.54}$$

Comprobamos en este punto como, a diferencia del caso de la optimización de las cargas, el empleo de esta definición del coste si que depende de las posiciones, actualizándose en cada iteración. No obstante, el resultado de la actualización del gradiente es un valor complejo (debido a que no hemos tomado valor absoluto en la definición del coste), mientras que la cantidad a actualizar (las posiciones) son reales. Se han probado soluciones intermedias, como actualizar los pesos con el valor absoluto de las posiciones actualizadas (evitando así la parte compleja), que aunque han proporcionado resultados correctos no han sido tan satisfactorios como los esperados. Por estas razones, se ha formulado y programado el algoritmo con un coste alternativo, que si tiene en cuenta estas particularidades.

b) Función de coste cuadrática conjugada

En este punto definiremos el coste a optimizar como la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de Green en el contorno de la estructura, tal y como observamos en la ecuación 3.55:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} |Gv_{cy}|^2 dc \quad (3.55)$$

De esta forma optimizaremos también el coste definido en la ecuación 3.3, pues la optimización de una función al cuadrado también optimiza la función original.

Realizando un desarrollo análogo al realizado en la optimización de las cargas complejas (ecuaciones 3.33 a 3.37), podemos desarrollar la expresión 3.55 del coste en una más manejable, como la expresada en la ecuación 3.56:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* + \right. \\ \left. + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \right) dc \quad (3.56)$$

En este punto ya tenemos definido el Coste que vamos a optimizar mediante la técnica de gradiente descendente. A continuación deberemos de obtener su gradiente respecto a las posiciones de las cargas imagen (en el eje 'x' y en el eje 'y'); al igual que en el caso anterior desarrollaremos el gradiente para las posiciones en 'x' obteniendo el resultado para las 'y' por similitud.

Calcularemos en este punto la derivada parcial del coste respecto a una posición x de una carga imagen arbitraria 'p':

$$\nabla_{x_p} C_{oste} = \frac{\partial}{\partial x_p} \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* + \right. \\ \left. + Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\bar{r}, \bar{r}_k)^* \right] \right) dc \quad (3.57)$$

Esta derivada la descompondremos en sus términos constituyentes para poder analizarla de forma más simple:

- En primer lugar, la ecuación 3.58 correspondiente al primer término de la ecuación 3.56 es nula debido a que el valor de la función de Green en el contorno de la estructura debido a la carga fuente, no va a depender nunca de la posición en el eje 'x' de una carga arbitraria:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \int_{\text{Contorno}} Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_o)^* dc = 0 \quad (3.58)$$

- El segundo término no se anulará, pues si que depende de la posición de una carga arbitraria x_p :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_p} \int_{\text{Contorno}} Gv(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k)^* dc = \int_{\text{Contorno}} Gv(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k)^* = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} Gv(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot q_p^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_p} Gv(\vec{r}, \vec{r}_p)^* = \\
 & \int_{\text{Contorno}} Gv(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot q_p^* \cdot \frac{e^{+j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 - j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dc
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

○ El desarrollo del tercer término tampoco se anulará, resultando:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_p} \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot \sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) dc = \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot \frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot q_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_p} Gv(\vec{r}, \vec{r}_p) = \\
 & \int_{\text{Contorno}} Gv^*(\vec{r}, \vec{r}_o) \cdot q_p \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dc
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

○ El desarrollo del cuarto término será:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_p} \int_{\text{Contorno}} \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k)^* \right] dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left[q_p \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k)^* \right) \cdot \frac{\partial Gv(\vec{r}, \vec{r}_p)}{\partial x_p} + q_p^* \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right) \cdot \frac{\partial Gv^*(\vec{r}, \vec{r}_p)}{\partial x_p} \right] dc = \\
 & = \int_{\text{Contorno}} \left[q_p \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k)^* \right) \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \right. \\
 & \left. + q_p^* \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right) \cdot \frac{e^{+j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 - j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dc
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Antes de recomponer los cuatro términos en los que habíamos descompuesto la ecuación 3.57, vamos a definirnos unas funciones auxiliares (concretamente las derivadas de la función de Green):

$$\begin{aligned}
 F(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{dGv(\vec{r}, \vec{r}')}{dx'} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 F^*(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{dGv^*(\vec{r}, \vec{r}')^*}{dx'} = \frac{e^{+j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 - j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Así, podemos obtener el gradiente del coste respecto la posición ‘x’ de una carga imagen cualquiera, ‘p’, como:

$$\nabla_{x_p} C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} \left[q_p^* \cdot Gv(\vec{r}, \vec{r}_0') \cdot F^*(\vec{r}, \vec{r}_p') + q_p \cdot G_v^*(\vec{r}, \vec{r}_0') \cdot F(\vec{r}, \vec{r}_p') + \right. \\ \left. + q_p \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right) \cdot F(\vec{r}, \vec{r}_p') + q_p^* \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right) \cdot F^*(\vec{r}, \vec{r}_p') \right] dc \quad (3.63)$$

De igual forma que hemos definido el coste respecto a las posiciones en ‘x’ de las cargas imágenes, podemos definirlo respecto a las posiciones ‘y’; para ello usaremos la ecuación 3.63 sin más que sustituir la función auxiliar ‘F’ por otra que tenga en cuenta la posición en ‘y’ de las cargas. Esta función para las posiciones ‘y’ queda definida en la ecuación 3.64:

$$F(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{dGv(\vec{r}, \vec{r}')}{dy'} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (y - y') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ F^*(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{dGv^*(\vec{r}, \vec{r}')^*}{dy'} = \frac{e^{+j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (y - y') \cdot (1 - j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.64)$$

De esta forma ya podremos emplear el algoritmo por descenso de gradiente, pues tenemos calculado el gradiente del coste.

De forma práctica, se realizan dos algoritmos de descenso de gradiente de forma simultánea: uno para las posiciones en ‘x’ de las cargas imagen y otro para las posiciones ‘y’. Como resultado de esta optimización, cada una de las cargas se va “moviendo” por el espacio 2D para encontrar una posición que, en conjunto con todas las cargas imagen, minimicen el coste y sean capaces de obtener una representación de los potenciales en el interior de la cavidad de forma más fidedigna.

El coste computacional en este caso no es despreciable, pues estamos realizando dos algoritmos iterativos por descensos de gradiente, siendo tanto el cálculo del gradiente del coste como el coste en si muy complejos de calcular. Trataremos de controlar este coste empleando dos técnicas de forma simultánea (similares a las usadas en la optimización del valor complejo de las cargas).

➤ Ajuste dinámico del paso ‘μ’ (definido en la ecuación 3.24)

El ajuste del paso se realizará de forma dinámica, tratando de reducir al máximo el coste computacional del algoritmo. Para ello, empezaremos el algoritmo con un valor de la constante ‘μ’ elevado, reduciéndolo progresivamente en las iteraciones en las que no se consiga reducir el error. Su gestión es idéntica a la realizada en la optimización del valor complejo de las cargas, y consigue reducir el coste computacional de forma considerable.

➤ Detención dinámica del algoritmo con un criterio de convergencia

Definiremos un criterio de parada del algoritmo cuando en un número dado de iteraciones (por ejemplo 15), el valor obtenido de los costes presente una variación muy reducida (por ejemplo del 0.01%). De esta forma se detecta que el algoritmo alcanzó la convergencia, deteniendo su ejecución.

En este punto tenemos definido de forma global la optimización de las posiciones de las cargas: hemos obtenido el gradiente del coste (tanto para las posiciones en 'x' como para las posiciones en 'y'), tenemos unos valores de partida con los que comenzar el algoritmo (los proporcionados por la situación inicial de las cargas) y hemos definido unos criterios dinámicos de gestión del paso y detención del algoritmo.

Los resultados obtenidos por este método mejoran sensiblemente, tanto en velocidad de ejecución como en resultados finales, a los logrados por el método de optimización de posiciones con función de coste original; ello es debido a la actualización con valores reales de las posiciones (sin necesidad de tomar valor absoluto o de tomar únicamente la parte real) y a que la función de coste tomada, al ser cuadrática, presenta una velocidad de convergencia superior.

Este método es especialmente eficaz en situaciones particulares en la que otros métodos no proporcionaban buenos resultados: especialmente cuando acercamos la fuente a las paredes de la estructura que estamos analizando. En ese caso, una distribución simétrica de cargas o una optimización de sus valores no es suficiente para reducir el error; no obstante una variación de la posición de todas las cargas, situándose de forma apropiada, sí que consigue una reducción del coste.

Es interesante el estudio de la convergencia del algoritmo, en función tanto de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro como del número de cargas imagen empleado. Al aumentar el número de imágenes empleado, se reduce el margen de mejora que el algoritmo puede realizar ya que es más probable que caiga en un "mínimo local" (pues su presencia aumenta conforme aumenta el número de carga imágenes empleadas). Respecto a la posición de la carga fuente en el interior de la cavidad, para un caso general consigue mejorar el coste inicial, aunque esta mejora es inferior a la de otros métodos (debido a que se llega con cierta asiduidad a un mínimo local); no obstante cuando la carga fuente se sitúa cerca de las paredes, es el único método capaz de reducir el error, proporcionando unos resultados de los potenciales más válidos.

Otro factor a tener en cuenta, es la posición de partida de las cargas antes de iniciar el algoritmo y su situación en cercanía con posibles mínimos locales: una posición de partida relativamente cercana a otra puede proporcionar resultados mucho mejores.

En cuanto al coste computacional obtenido, este es sensiblemente superior al de la optimización del valor complejo de las cargas; esto es debido a que para obtener la actualización de las posiciones se requiere calcular en cada iteración las integrales de la ecuación 3.57, mientras que en el otro caso parte de las operaciones eran comunes a todas las iteraciones. Este alto coste se intenta mitigar con la gestión dinámica del paso y una detección óptima, aunque sigue siendo relativamente alto en la mayoría de los casos.

En el desarrollo de la optimización, no se ha tenido en cuenta en ningún momento la geometría de la cavidad que se está analizando. Es por ello por lo que este método es fácilmente extensible a cualquier otra estructura, sin apenas modificaciones.

Finalmente indicar que se pueden combinar las dos técnicas de optimización presentadas, tanto para las posiciones como las cargas. De esta forma obtendremos una posición y unos valores complejos de las cargas imagen óptimos.

3.2.6.2 Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos muestran como el método propuesto es eficaz principalmente cuando el número de cargas empleadas no es muy elevado y cuando la carga fuente en el interior de la cavidad se sitúa relativamente cerca de algunas de las paredes.

Vamos a desarrollar un caso particular para comprobar el funcionamiento del método, mostrando posteriormente los resultados para una gran cantidad de posiciones de la fuente en el interior del cilindro y de número de imágenes.

Supongamos un cilindro de radio $a = \lambda$, en el que está situada una carga origen en la posición $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$ y sobre la que situamos 10 cargas imágenes para satisfacer las condiciones de contorno. La situación la podemos observar en la figura 3.32:

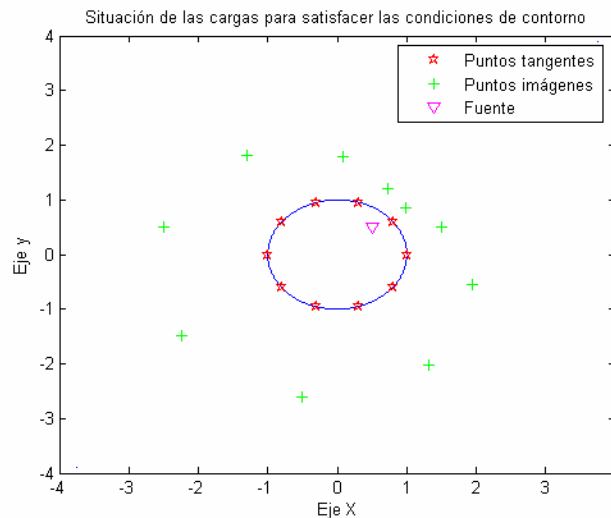


Figura 3.32 Situación con 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

En este caso el error de la aproximación del potencial escalar es de:

$$Error = 23.9018$$

Podemos observar la distribución del potencial escalar en el contorno del cilindro, comprobando como tenemos 10 nulos (correspondientes a las 10 condiciones impuestas) y como el valor entre estos nulos tiene valores relativamente elevados:

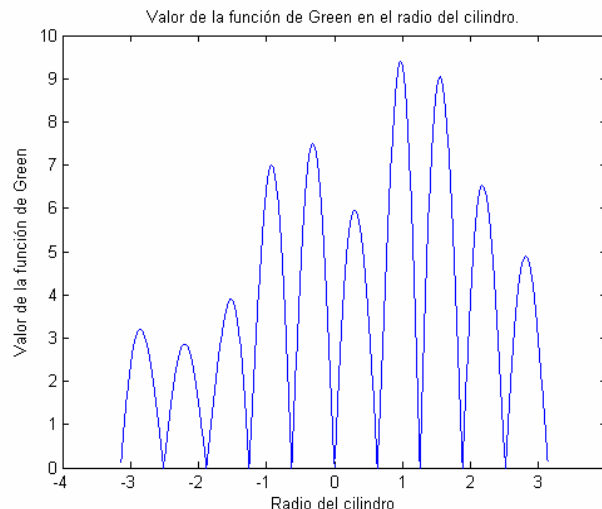
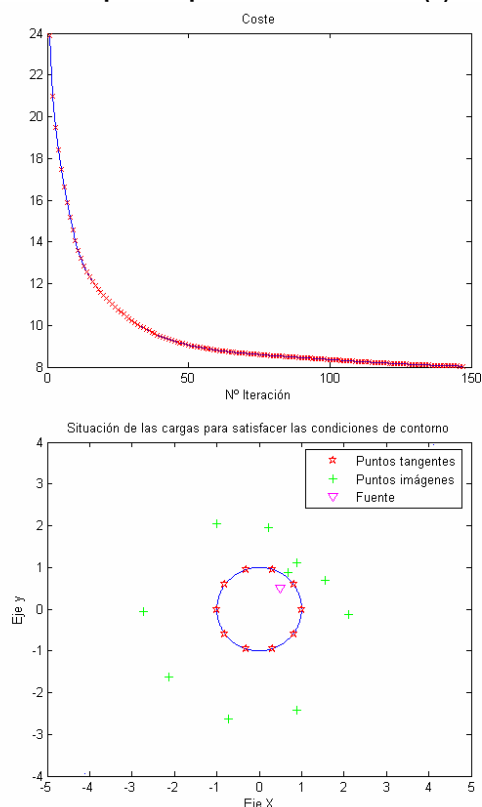


Figura 3.33 Potencial escalar en función del ángulo. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

Destacamos la falta de simetría de la representación, debido a que la fuente no se encuentra centrada en el interior del cilindro.

Sobre esta configuración vamos a emplear la optimización por descenso de gradiente de las posiciones, obteniendo una reducción del coste en función del número de iteración. Necesitamos llegar a un compromiso entre coste computacional y la reducción del coste buscada; así mostraremos dos casos con distinto criterio de parada para observar la influencia del mismo:

Criterio de parada primando velocidad (a)



Criterio de parada primando coste (b)

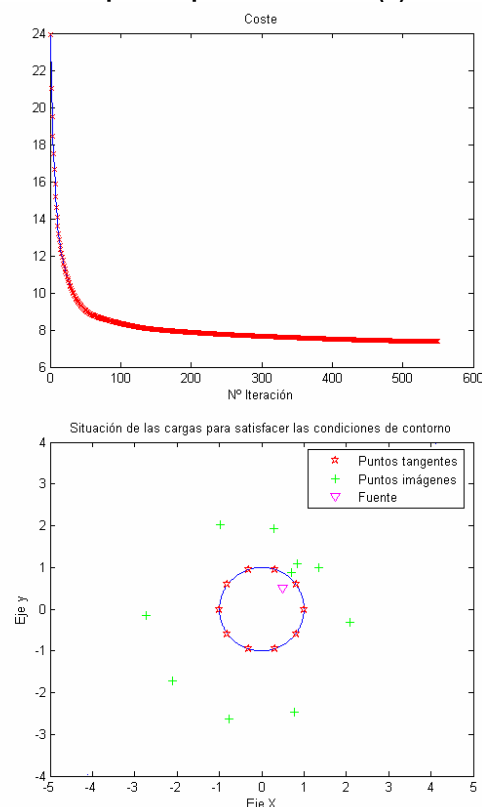


Figura 3.34 Representación de la evolución del coste y de las posiciones de las cargas imagen al realizar una optimización de las posiciones. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

En la figura anterior, podemos observar como el método funciona, reduciendo de forma significativa el error producido al implementar los potenciales. En el caso (a), donde se ha primado la velocidad de convergencia, vemos que se han necesitado un número de iteraciones moderado (cerca de las 150) consiguiendo un coste bastante reducido (de 8.039 frente al coste original de 23.9); es significativa la disposición que han tomado las imágenes: dos de ellas se han colocado enfrente de la carga fuente situada en el interior de la cavidad, tratando de contrarrestar los valores más altos que se producen en esa zona, mientras que el resto de imágenes más alejadas apenas han modificado su posición.

En el caso (b), se han necesitado un gran número de iteraciones para reducir el error hasta el margen deseado (en total 550 iteraciones, para obtener un coste de 7.372). Observamos como el error se ha reducido poco en comparación del gran coste computacional que se ha empleado; también es significativo la situación final de las cargas imagen: tres de ellas se sitúan casi en confrontación con la carga fuente, tratando

de limitar los valores de pico en la estructura, mientras que el resto se sitúan alrededor de la cavidad, en una situación más alejada.

Con esta última configuración, obtenemos una distribución del potencial en el contorno de la estructura circular de:

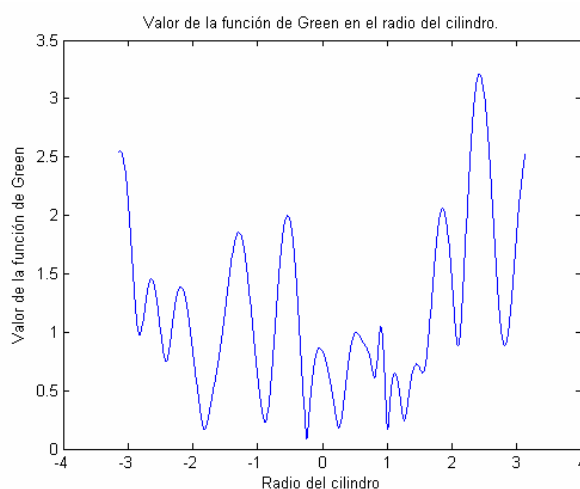


Figura 3.35 Potencial escalar en función del ángulo tras optimizar las posiciones de las cargas imagen. 10 imágenes y fuente en $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$

Observamos como han desaparecido los 10 nulos provocados por las 10 condiciones de las cargas, obteniendo una distribución que en media es mucho más reducida. La nueva distribución obtenida no tiene por qué guardar ninguna relación con la original.

Comprobamos de esta forma como el método de optimización de las posiciones es efectivo, proporcionando una representación de los potenciales más exacta que el método original (presentado en el capítulo 2).

Posteriormente, realizaremos una comparativa entre los distintos métodos, para analizar las mejoras de cada uno y las ventajas de emplearlos de forma conjunta.

Mostraremos a continuación cual es el valor final del coste obtenido en este método en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro [$(0\lambda, 0\lambda)$, $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$, $(0.4\lambda, 0\lambda)$, $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$, $(0.5\lambda, 0\lambda)$, $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$]. Indicaremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto al valor inicial de cargas imágenes.

- Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:

Tipo Técnica \ N° cargas	N° cargas					
	5	10	15	20	25	30
Point-matching	10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006	3.07174e-008
Optimización de las posiciones	10.1061	1.0771	6.0212e-003	7.0595e-005	1.3369e-006	3.027e-008

Tabla 3.20 Coste optimizando posiciones para distintos n° de imágenes, fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$

- Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	1.204944e-007
Optimización de las posiciones	11.8225	9.21682	7.8030E-002	4.4101e-004	4.5577e-006	1.012308e-007

Tabla 3.21 Coste optimizando posiciones para distintos nº de imágenes, fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	5.137437e-007
Optimización de las posiciones	14.5984	10.9457	0.30708	2.19611e-003	2.071509E-005	4.587410e-007

Tabla 3.22 Coste optimizando posiciones para distintos nº de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

- Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	26.6829	23.6945	1.4449	1.320842e-002	2.8172e-004	2.55236e-005
Optimización de las posiciones	19.0104	9.920484	1.07586	1.23631e-002	2.80277e-004	2.55236e-005

Tabla 3.23 Coste optimizando posiciones para distintos nº de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

- Posición $(0.5\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	17.9904	19.9656	0.9056	0.00700	9.6659e-005	3.77679e-006
Optimización de las posiciones	17.0055	9.167151	0.711393	5.588779e-003	8.241987e-005	3.776069e-006

Tabla 3.24 Coste optimizando posiciones para distintos nº de imágenes, fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$

- Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371
Optimización de posiciones	20.8588	3.35552	0.63364	1.473625	0.14394	0.32348

Tabla 3.25 Coste optimizando posiciones para distintos nº de imágenes, fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Una vez analizado el comportamiento del algoritmo, podemos extraer algunas conclusiones acerca de sus resultados:

- El método siempre proporcionará resultados con un coste igual o inferior al coste que teníamos de partida (antes de optimizar las posiciones).
- Observamos como los resultados obtenidos son satisfactorios, fundamentalmente cuando la carga fuente se sitúa cerca de las paredes de la estructura a analizar. Para el resto de casos, aunque produce mejoras apreciables, son inferiores a las del resto de métodos analizados.
- El algoritmo consigue mejores resultados cuando el número de cargas empleadas no es muy elevado: la explicación de este comportamiento es que al aumentar el número de cargas, estas van proporcionando costes cada vez más pequeños dejando un menor margen de mejora. Además, el tener que optimizar de forma simultánea la posición de un gran número de cargas hace que sea más probable caer en un mínimo local.
- Como principal desventaja, indicaremos que presenta un coste computacional relativamente elevado, que aunque es controlado con la gestión dinámica del paso de actualización y la detención automática del algoritmo, sigue siendo muy superior al del resto de métodos.

3.2.7 Empleo de métodos de forma conjunta y comparación

En este apartado vamos a realizar la unión de las técnicas utilizadas anteriormente para la optimización de las posiciones y valores de las cargas que empleamos en el cálculo de las funciones de Green.

Concretamente, combinaremos la técnica de emplear un conjunto de cargas con una posición circular, en la que variamos el radio para minimizar el coste (es decir, ver la exactitud con la que se satisfacen las condiciones de contorno en la pared del cilindro), con las técnicas de optimización de las posiciones y cargas mediante un algoritmo de gradiente descendente. Todos estos métodos han sido expuestos de forma individual comprobando la corrección de sus resultados; trataremos de unir las tres técnicas con el fin de obtener unos resultados óptimos.

Finalmente, realizaremos una comparativa de la mejoría del error a la hora de representar los potenciales obtenidos con cada uno de los métodos propuestos, viendo las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

En primer lugar, partiendo de la situación y valores originales de las cargas imágenes, emplearemos una técnica de ubicación de las cargas imagen (como puede ser la variación del radio tras colocar las imágenes de forma circular, o la optimización de las posiciones mediante gradiente descendente) y posteriormente, la técnica de optimización de las posiciones. El empleo de ambas técnicas de forma conjunta conseguirá una reducción del coste en la mayoría de las ocasiones, obteniendo los valores mínimos distintos métodos en función de la configuración del problema (por ejemplo, en ciertas ocasiones es más efectivo emplear las dos optimizaciones y en otras, emplear primero la variación del radio y luego la optimización de las cargas).

Mostraremos a continuación cual es el valor final del coste obtenido por los distintos métodos (tanto los comentados en apartados anteriores como la combinación de los mismos) en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$. Indicaremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto al valor inicial de cargas imágenes.

- *a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25
Point-matching	10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006
Solo varía radio	9.6945	1.12238	1.33286-003	2.56416E-007	1.34045E-011
Solo optim. cargas	10.1293	0.89803	3.8553E-003	4.5499E-005	8.63487E-007
Variación radio + optimiza cargas	9.6945	0.7715838	8.48775E-004	1.63088E-007	8.5839E-012
Optimiza posiciones	10.1061	1.07716	6.0212E-003	7.05951e-005	1.3392e-006
Optimiza posiciones y cargas	10.1061	0.893449	3.8555E-003	4.549704e-005	8.634874e-007

Tabla 3.26 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$

- *b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	4.0841e-008
Solo varía radio	10.9611	3.2547	3.5181e-002	3.8519e-005	4.8903e-007	1.9586e-008
Solo optim. cargas	10.7727	2.4473	8.0247e-002	4.4086e-004	4.5437e-006	8.9950e-008
Variación radio + optimiza cargas	10.4712	2.4647	2.7858e-002	3.5059e-005	4.8902e-007	1.9586e-008
Optimiza posiciones	11.8225	9.2168	7.8030e-002	4.4101e-004	4.5577e-006	1.0123e-007
Optimiza posiciones y cargas	10.7593	3.9511	7.6710e-002	4.4044e-004	4.5415e-006	8.9952e-008

Tabla 3.27 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- *c) Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	4.6492e-007
Solo varía radio	10.3900	6.8721	8.6191e-002	5.8619e-004	1.8183e-005	3.2837e-007
Solo optim. cargas	11.2488	3.7344	0.3001	2.0126e-003	2.0381e-005	4.2456e-007
Variación radio + opti cargas	10.0980	4.8108	6.8744e-002	4.8472e-004	1.7717e-005	3.0937e-007

Optimiza posiciones	14.5984	10.9457	0.3070	2.1961e-003	2.0715e-005	4.5874e-007
Optimiza posiciones y cargas	10.8366	7.9109	0.2769	2.0221e-003	2.0327e-005	4.2390e-007

Tabla 3.28 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$

- d) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	26.6829	23.6945	1.4449	1.3208e-002	2.8172e-004	2.5523e-005
Solo varía radio	11.0951	9.0305	0.2952	1.3208e-002	2.8172e-004	2.5523e-005
Solo optim. cargas	10.3198	7.1719	0.9737	9.9252e-003	2.6741e-004	2.5523e-005
Variación radio + optimización cargas	10.4546	7.8761	0.2371	9.9252e-003	2.6741e-004	2.5523e-005
Optimiza posiciones	19.0104	9.9204	1.0758	1.2363e-002	2.8027e-004	2.5523e-005
Optimiza posiciones y cargas	10.8615	6.5178	0.8390	1.0916e-002	2.6748e-004	2.5523e-005

Tabla 3.29 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

- e) Posición $(0.5\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	17.9904	19.9656	0.9056	0.0070	9.6659e-005	3.7767e-006
Solo varía radio	10.1459	8.5620	0.1721	4.6655e-003	9.6659e-005	3.7767e-006
Solo optim. cargas	12.0109	5.8119	0.6611	5.4822e-003	7.8162e-005	3.7665e-006

Variación radio + opti cargas	9.9387	6.6690	0.1358	3.7698e-003	7.8162e-005	3.7665e-006
Optimiza posiciones	17.0058	9.1671	0.7113	5.5887e-003	8.2419e-005	3.7760e-006
Optimiza posiciones y cargas	11.4009	5.1803	0.5735	5.4893e-003	7.9875e-005	3.7695e-006

Tabla 3.30 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$

- f) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371
Solo varía radio	22.8266	8.0995	1.6061	4.2176	0.4509	1.1370
Solo optim. cargas	22.6211	8.0344	1.5755	4.2140	0.4509	1.1370
Variación radio + opti cargas	22.6211	8.0344	1.5755	4.2140	0.4509	1.1370
OptimCiza posiciones	20.8588	3.3555	0.6336	1.4736	0.1439	0.3234
Optimiza posiciones y cargas	4.0479	2.3237	0.6335	1.098	0.1401	0.3234

Tabla 3.31 Comparativa distintos métodos de optimización en función del número de imágenes, fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Observamos en las tablas anteriores como en la mayoría de las ocasiones, el mejor de los resultados se produce al emplear de forma conjunta un método de optimización de las posiciones (por gradiente o por variación del radio) y el método de optimización del valor complejo de las cargas por descenso de gradiente.

Podemos destacar algunas conclusiones sobre los métodos empleados:

- La combinación de los métodos es eficaz en un porcentaje muy alto de ocasiones, proporcionando un error mínimo. No obstante, presenta el inconveniente de tener un coste computacional muy elevado.

- Observamos como en general, la mejoría siempre se produce cuando el número de cargas imágenes empleadas es reducido, dejando un mayor margen para posibles mejoras y evitando la existencia de una gran cantidad de mínimos locales, donde pudiera caer alguno de los algoritmos.
- A la hora de analizar circuitos generales, situados normalmente en el interior de la cavidad, es más útil emplear la variación dinámica del radio, capaz de proporcionar resultados adecuados. La optimización posterior del valor complejo de las cargas suele proporcionar una mejora relativa adicional.
- En el caso de querer analizar cargas fuentes situadas cerca de las paredes de la estructura, el mejor método será la optimización por gradiente descendente de las posiciones de las cargas, con una optimización posterior del valor complejo de las cargas. Este método es el que presenta mayor coste computacional, pero permite mejoras sustanciales respecto a cualquier otro método.

3.2.8 Conclusiones

A lo largo de este apartado hemos ido analizando las distintas formas de optimización del potencial escalar, mejorando el coste de su implementación (definido en la ecuación 3.3) con el fin de obtener una representación de los potenciales en el interior de la cavidad lo más exacta posible.

En primer lugar presentamos el método de Integración por pulsos, que fue implementado con muchas variantes. Este método consistente en promediar el valor del potencial en el contorno de la estructura, lograba beneficios puntuales en algunos casos particulares pero no suponía una mejora clara respecto al método original.

Posteriormente pasamos a describir el método de ubicación de nulos de potencial en los picos de potencial, que consistía en introducir una nueva condición de contorno en la pared de la estructura que tuviera un máximo de potencial escalar. Este método evolucionaba de una situación inicial situando estas nuevas condiciones de forma iterativa en los picos de potencial. Conseguimos resultados satisfactorios cuando la carga fuente se encontraba muy cerca de la pared (y existía un pico de potencial muy marcado), reduciendo el coste de la implementación de forma notable. No obstante para un caso general, donde no existe un pico predominante sobre los demás, el método provocaba un desajuste en la distribución del potencial aumentando el coste de su implementación.

Después pasamos a examinar el método de variación del radio, consistente en situar las cargas imágenes de forma circular alrededor de la estructura y variar su radio de tal forma que se optimice el coste; este método produjo unos resultados muy satisfactorios reduciendo el error de la implementación en todos los casos (exceptuando aquellos en los que la carga se sitúa muy cerca de las paredes).

A continuación, introducimos los métodos de gradiente descendente. El primero de ellos optimiza el valor complejo de las cargas (que se encuentran en una situación dada) consiguiendo unos resultados válidos en casi todas las situaciones, especialmente cuando la carga fuente se encuentra cerca del centro del cilindro. El segundo optimiza las posiciones de las mismas (en el plano x-y), obteniendo unas reducciones de coste notable, fundamentalmente al acercar la carga fuente a las paredes del cilindro. Como inconveniente de estos métodos señalar que su coste computacional es más elevado que

el del resto, a pesar de que ha sido controlado y moderado con técnicas como una gestión dinámica del paso de actualización o una detección automática del algoritmo.

El último de los métodos presentados consistió en una combinación de técnicas, se basaba en variar primero la posición de las cargas imágenes (mediante una técnica de variación del radio u optimización de las posiciones) y luego optimizar el valor complejo de las cargas. Esta técnica compuesta ha proporcionado los mejores resultados en todas las situaciones, disminuyendo el error de forma sustancial respecto al proporcionado por Point-Matching. Además presenta la ventaja de no depender del tipo de estructura que se está analizando, siendo fácilmente extensible a geometrías arbitrarias.

Como conclusión, debemos indicar que la optimización del potencial escalar dependerá fundamentalmente de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro y que en función de ésta unos métodos proporcionarían unos resultados más satisfactorios que otros.

Para un caso general de análisis de la estructura, al situarse los circuitos activos en el interior de la misma y no cerca de las paredes, se recomienda el empleo del método combinado de la variación del radio y optimización posterior del valor complejo de las cargas, ya que consigue reducir considerablemente el error y presenta un coste computacional moderado.

3.3 Optimización del potencial vector

3.3.1 Introducción

En este apartado vamos a tratar de analizar y optimizar el potencial vector para la estructura bajo análisis, en este caso un cilindro.

La mayor complejidad en las ecuaciones que definen el potencial vector frente al potencial escalar hacen que este análisis y optimización sea mucho más complejo, haciendo inviables muchas de las técnicas empleadas anteriormente (como por ejemplo la optimización por gradiente).

Vamos a definirnos en primer lugar un concepto de ‘Coste’ similar al hallado al potencial escalar, aunque no será igual ni en expresión característica ni en valores relativos. Posteriormente, tras obtener los valores de Coste proporcionados por la técnica de Point-Matching en diversas situaciones, trataremos de optimizar este coste mediante la técnica de variación del radio de los dipolos imágenes.

Por la teoría desarrollada en el Capítulo 2, sabemos que en los ‘N’ puntos discretos de la estructura se deben de satisfacer las ecuaciones definidas por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^x + \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^y &= -\sin(\varphi_i) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') \\ \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x I_k^x + \sin(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y I_k^y &= -\cos(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x \end{aligned} \quad (3.65)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

De donde obteníamos los valores complejos de los dipolos imagen (tanto orientados en la dirección ‘x’ como en la ‘y’). Las constantes C_y^x fueron definidas y desarrolladas en la ecuación 2.25

Vamos a suponer en este desarrollo que el dipolo fuente se encuentra orientado en la dirección ‘x’, siendo el desarrollo para una orientación en la dirección ‘y’ totalmente similar.

Para evaluar el grado de cumplimiento de esta ecuación, no únicamente en los N puntos discretos en donde se impone, sino en todos los puntos que rodean nuestra estructura a analizar (un cilindro en este caso) tendremos que evaluar las dos condiciones anteriores y observar su grado de corrección.

En primer lugar, dado la ecuación 3.65, deberemos de resolver el sistema con el fin de poder obtener los valores de los potenciales vector en el interior de la estructura.

$$\begin{aligned} G_{Acy}^{xx}(\vec{r}) &= G_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0') + \sum_{k=1}^N I_k^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_k') \\ G_{Acy}^{yx}(\vec{r}) &= \sum_{k=1}^N I_k^y \cdot G_A^{yx}(\vec{r}, \vec{r}_k') \end{aligned} \quad (3.66)$$

En el caso del potencial vector, sus valores no son nulos en el contorno de la estructura (a diferencia del potencial escalar). Lo que si que debe ser nulo es la evaluación en un punto cualquiera ‘i’ del contorno de la expresión 3.65, es decir:

$$\begin{aligned}
 & -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^x - \sin(\varphi_i) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') + \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^y = 0 \\
 & \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x I_k^x - \cos(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x + \sin(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y I_k^y = 0
 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Por tanto, deberemos integrar la contribución de cada una de las condiciones a lo largo de todo el contorno de la estructura:

$$F_1 = \int_{\text{Contorno}} \left| -\sin(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_c, \vec{r}_k') \cdot I_k^x - \sin(\varphi_c) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_c, \vec{r}_0') + \cos(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_c, \vec{r}_k') \cdot I_k^y \right| dc \quad (3.68)$$

$$F_2 = \int_{\text{Contorno}} \left| \cos(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N C_{c,k}^x I_k^x - \cos(\varphi_c) \cdot C_{1,0}^x + \sin(\varphi_c) \sum_{k=1}^N C_{c,k}^y I_k^y \right| dc = 0 \quad (3.69)$$

De tal forma que cuanto más próximo sea el resultado de las ecuaciones 3.68 y 3.69 a cero más preciso será la representación del potencial vector en el interior de la estructura analizada. Finalmente, sumaremos ambas condiciones con el fin de obtener un coste total representativo del potencial vector:

$$C_{oste} = F_1 + F_2 \quad (3.70)$$

Una vez definido el coste podemos aplicarlo a distintas situaciones con el fin de evaluar la precisión del potencial vector en cada caso.

Concretamente, el valor del coste dependerá del número de imágenes empleadas (pues cuantas más imágenes usemos, un mayor número de puntos discretos cumplirán la condición de contorno) y de la posición de la carga fuente en el interior del cilindro.

Supongamos un cilindro de radio $a = \lambda$, (siendo la frecuencia de 300Mhz) en el que situamos la carga fuente en el interior del cilindro y empleamos un total de 20 imágenes para calcular el potencial escalar. La situación es representada en la figura 3.36:

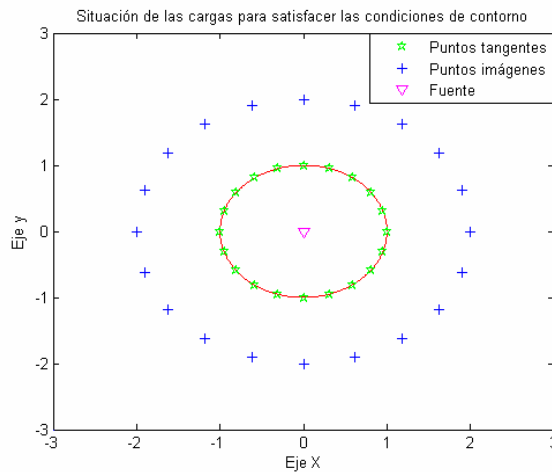


Figura 3.36 Representación 20 cargas imágenes alrededor del cilindro, fuente en origen coordenadas

Vamos a representar el valor para cada punto de la estructura de la ecuación 3.67, observando cuando difiere de 0 y viendo las diferencias entre las dos condiciones:

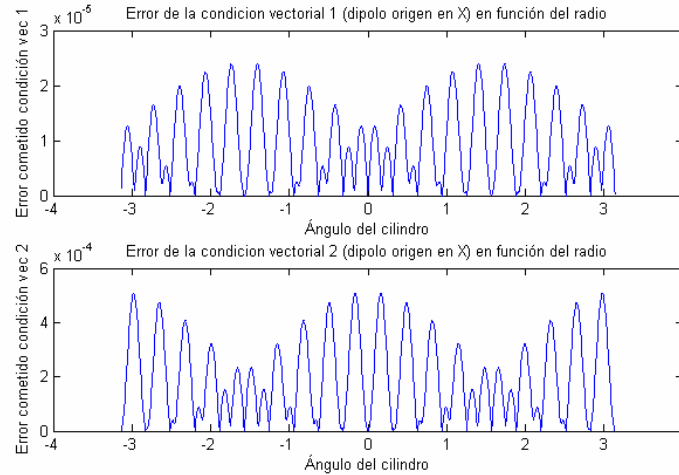


Figura 3.37 Valor de las condiciones del potencial vector en el contorno del cilindro, 20 imágenes, fuente situada en el origen.

Comprobamos cómo obtenemos 20 nulos en cada una de las condiciones vectoriales, correspondientes a los 20 puntos discretos en donde habíamos forzado este valor.

Finalmente, sumando ambas contribuciones obtendremos el comportamiento en cada punto de la estructura del cilindro respecto al potencial vector:

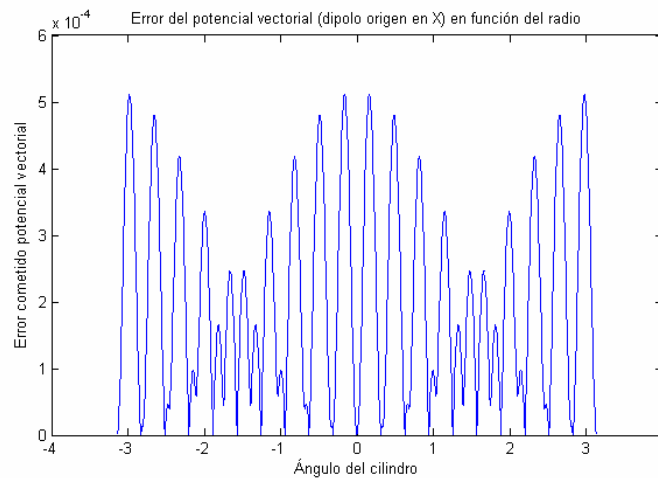


Figura 3.38 Distribución del error del potencial vector en el contorno del cilindro, 20 imágenes, fuente situada en el origen.

Podemos observar al igual que en la figura 3.37, como existen 20 nulos, correspondientes a las 20 condiciones que hemos impuesto mediante la ecuación 3.65. De esta forma, si integramos este resultado en todo el contorno del cilindro obtendremos el Coste, tal y como lo habíamos definido en la ecuación 3.70.

Concretamente y para este caso, obtenemos un error de:

$$Error = 1.3035 \cdot 10^{-3}$$

Comprobamos como el error obtenido es muy reducido, lo que implica que la aproximación del potencial escalar con 20 cargas imágenes es adecuada.

Si situáramos la carga fuente en otra posición, para este mismo número de cargas imágenes, obtendremos un coste diferente en función de la posición escogida. Igual ocurre para una variación del número de cargas imágenes, que también modifica el valor del coste (en general, a mayor número de imágenes menor coste obtenido).

Por ejemplo, basándonos en las suposiciones del caso anterior, pero situando la carga en la posición $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$ obtenemos una situación y una distribución del coste como muestra la figura 3.39:

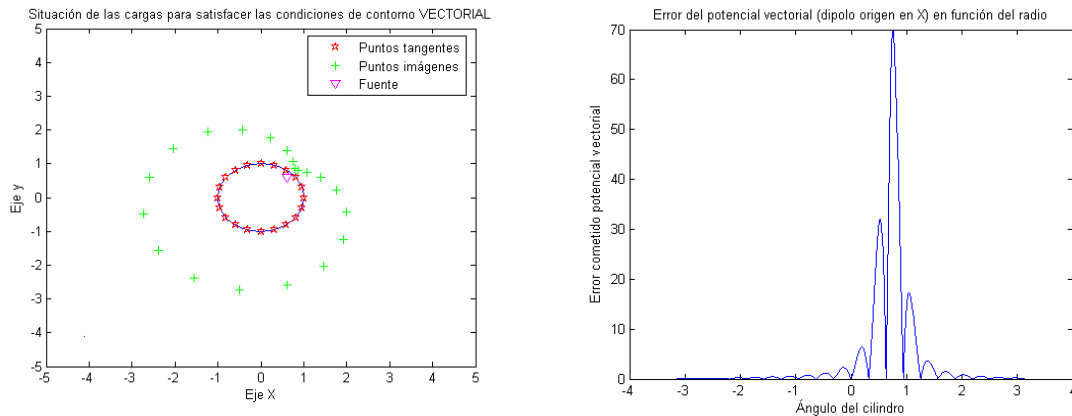


Figura 3.39 Representación de situación y coste del potencial escalar en un cilindro, empleo de 20 imágenes y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Comprobamos como en un ángulo de 0.7477 radianes obtenemos un pico del potencial, pues los dipolos imágenes son incapaces de contrarrestar el efecto del dipolo fuente situado tan cerca de la pared del cilindro, produciéndose un Coste muy elevado respecto al anterior, concretamente con un valor de:

$$\text{Coste} = 25.8345$$

Ello implica que la representación del potencial vector en este caso es mucho menos exacta que en el caso anterior, no obstante todavía no es un valor muy elevado y se puede dar por válido.

Podemos observar la descomposición del Coste anterior, comprobando cual de las dos condiciones impuestas sobre el contorno del cilindro presenta un mayor error:

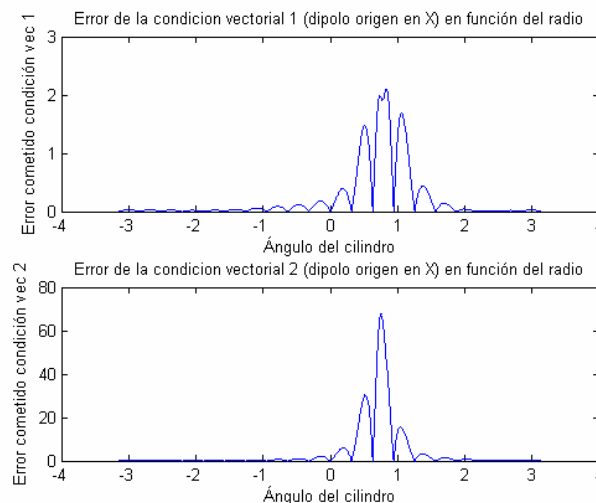


Figura 3.40 Detalle del Coste del potencial vector para cada condición. 20 imágenes y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Observamos como la condición número 2 presenta unos picos de error muy superior a la condición 1. Esta condición que implica un mayor error proviene de obtener la divergencia del potencial vector en el contorno del cilindro e igualarla a 0, tal y como se demostró en el capítulo 2 (ecuación 2.13 y 2.16 a 2.20)

Al igual que ocurría con el potencial escalar, el situar un dipolo fuente muy cerca de la paredes de la estructura a analizar supone un pico de error. No obstante, como los circuitos electrónicos que pueden ser analizados con esta formulación no se encuentran usualmente situados muy cerca de los bordes de las guías que los contienen, este error, aunque relevante, pierde parte de su importancia.

Entre las dos situaciones expuestas existe un gran abanico de posibilidades, en función del número de dipolos imágenes empleadas y de la posición de la fuente. Realizaremos un barrido de estas variables para obtener unos costes de referencia en posiciones típicas y con un número de imágenes variable. Concretamente, vamos a analizar el coste del potencial vector cuando situamos la fuente en las posiciones: [(0,0) , (0.2,0.2) , (0.4,0) , (0.4,0.4) , (0.5,0) , (0.7,0.7)] y tenemos un número de cargas imágenes que puede ser (5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30). Así:

- a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	34.9888	14.9860	0.1174	1.3035e-3	2.8246e-5	7.3812e-7

Tabla 3.32 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

- b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	31.1104	31.9765	1.3449	1.5561e-2	1.5819e-4	3.7200e-6

Tabla 3.33 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- c) Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	64.0995	62.1398	3.6035	0.1014	6.3463e-4	1.1809e-5

Tabla 3.34 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

- d) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	57.1065	90.6108	10.4649	0.7906	1.1148e-2	4.2507e-4

Tabla 3.35 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

- e) Posición $(0.5\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	70.9312	83.0511	7.2793	0.3847	3.1735e-3	7.6270e-5

Tabla 3.36 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.5\lambda, 0\lambda)$

- f) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:

Nº cargas	5	10	15	20	25	30
Coste	167.0453	159.1433	85.0425	245.5419	535.3140	378.9134

Tabla 3.37 Coste vectorial método original, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Tras analizar los resultados para el método general de Point-Matching, podemos extraer dos conclusiones interesantes:

- Al aumentar el número de dipolos, en general, disminuye el coste que obtenemos. No obstante, existen algunos casos particulares que dependerán de las posiciones relativas del dipolo fuente y las imágenes.
- En función de la posición del dipolo fuente, conforme éste se encuentra más cerca de la pared de la estructura (cilindro en este caso), el coste va creciendo. Cabe destacar el caso de la posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$, donde todos los resultados han sido muy elevado, haciendo que el potencial vector obtenido en este caso sea muy impreciso.

En este punto tenemos totalmente caracterizado el comportamiento del potencial vector, obteniendo sus errores en función de las características de la situación a analizar.

Sobre esta base, vamos a tratar de optimizar el coste de la implementación del potencial vector empleando un método de variación del radio, situando los dipolos de imagen en círculo englobando a la estructura. Se ha decidido implementar este método debido a que ha sido el que mejores resultados ha proporcionado para el potencial escalar.

A pesar de que en un primer momento se realizó el cálculo del potencial vector con integración por pulsos, éste no dio buenos resultados. Un estudio más exhaustivo con una aproximación más exacta de las integrales a emplear podría solucionar estos inconvenientes, dando unos costes más promediados a lo largo del contorno de la estructura.

Otros métodos como los de descenso de gradiente no se abordaron debido a la complejidad matemática que conllevarían, sin tener asegurado en ningún momento una reducción del coste significativa. No obstante, sería conveniente su posterior análisis, con el fin de observar si esta técnica es efectiva para reducir el coste del potencial vector.

3.3.2 Método de la variación del radio

3.3.2.1 Desarrollo teórico

El método de la variación del radio del círculo en el que situaremos los dipolos imagen ha sido implementado debido a los excelentes resultados que proporcionó la versión desarrollada para el potencial escalar.

Al igual que en éste, el método se basa en una ubicación de los dipolos imagen diferente a la empleada hasta ahora en el método general (expuesto en el capítulo 2), manteniendo los dipolos imágenes en un círculo alrededor de la estructura a analizar (independientemente de la forma de la estructura y de la posición de la fuente en el interior de la misma).

Supongamos una situación de 20 dipolos imágenes, donde hemos situado el dipolo fuente en una ubicación distinta del origen, por ejemplo en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$; podemos observar las diferencias entre el método general de ubicación de dipolos y el actual:

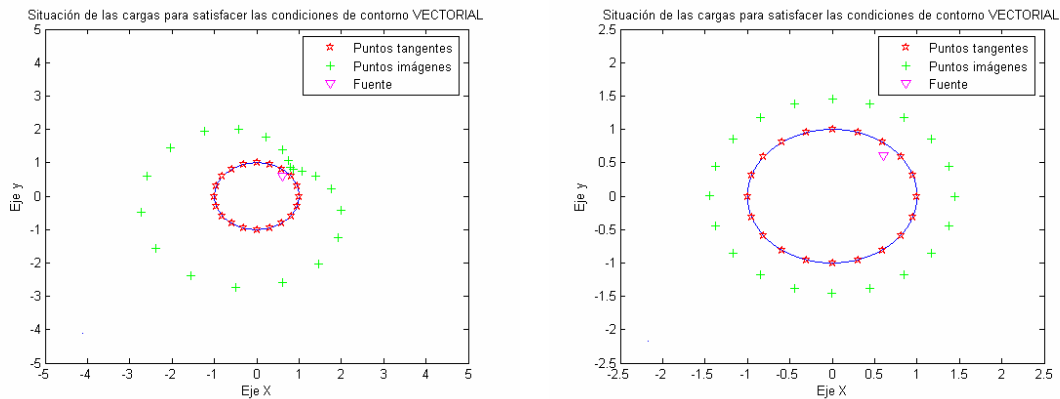


Figura 3.41 Diferencias en la ubicación de dipolos imágenes. a) Método general. b) Variación dinámica del radio. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Observamos como al situar los dipolos imagen mediante la variación del radio, éstos se encuentran distribuidos uniformemente a lo largo de un círculo que envuelve a la estructura a analizar, sin depender de la posición del dipolo fuente (situado en el interior de la estructura) como pasaba en el método original.

Tal y como ocurría en el potencial escalar, el variar la posición de las cargas no afecta a la matemática empleada para la obtención del potencial vector, salvo en el

cálculo de las distancias de los dipolos imágenes al centro del cilindro, a la posición de la fuente y a los puntos tangentes en el contorno del cilindro.

El algoritmo seguido por tanto consistirá en variar el radio de los dipolos imágenes, y obtener un coste. Así obtendremos qué radio es el que produce un menor error y será el que empleemos en el cálculo del potencial vector.

En cuanto al coste computacional, dependerá fundamentalmente de los límites entre los que variemos el radio de las imágenes, y el paso con el que nos movamos entre esos límites. Este parámetro suele ser elevado, debido a la alta carga computacional empleada en calcular el ‘Coste’ para una determinada distribución de imágenes.

3.3.2.2 Resultados obtenidos

Una vez posicionadas las cargas imágenes en un círculo de un determinado radio “R” alrededor de la estructura, vamos a realizar un estudio del Coste del potencial vector en función del radio en el que se encuentran situadas los dipolos imágenes. Este radio va a proporcionar valores “óptimos” que consiguen minimizar de forma más que considerable el coste del potencial vector.

En primer lugar, antes de mostrar los resultados para todos los casos, vamos a estudiar detenidamente un caso “tipo”, por ejemplo, empleando un total de 20 cargas imágenes y situando la fuente en la posición $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$, tal y como observamos en la figura 3.41 b).

Comprobamos como en este caso la ubicación de los dipolos imagen no coincide con la ubicación de las imágenes con el método inicial. No obstante es en la variación del radio donde radica la potencia de este método de optimización.

A priori no podemos conocer que valor del radio será el que proporcione un coste mínimo. Sin embargo, basándonos en la experiencia acumulada en el empleo de este método en el potencial escalar, representamos el coste en función del radio, variando el mismo entre 1 y 30λ (siendo éste un rango más que suficiente para obtener la evolución del coste en función del radio). De esta forma obtenemos:

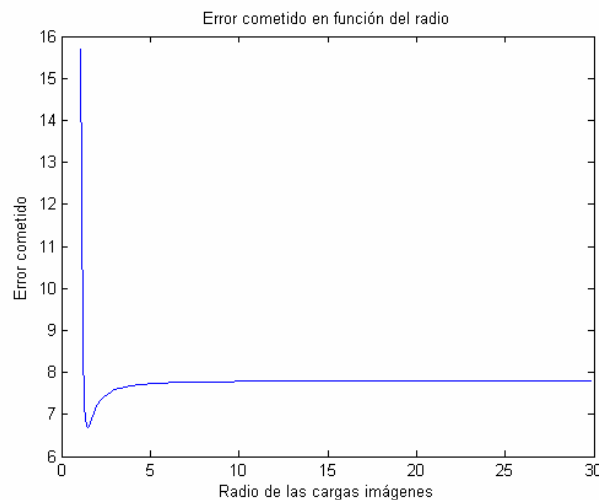


Figura 3.42 Variación del coste del potencial vector en función del radio. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Comprobamos como el coste evoluciona, presentando un mínimo local a un distancia de 1.45λ , que observamos en detalle en la figura 3.43:

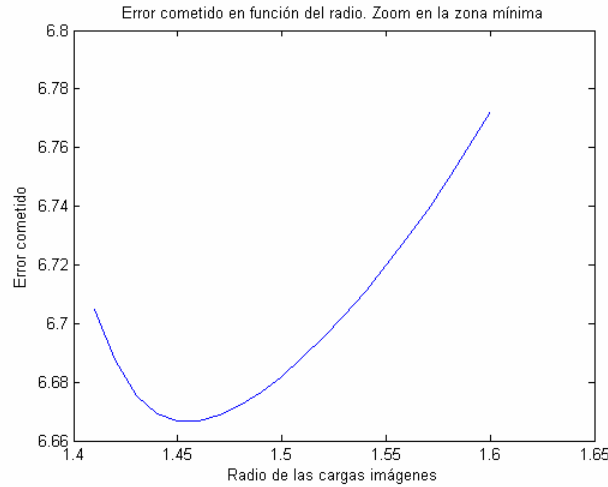


Figura 3.43 Variación del coste del potencial vector en función del radio en torno al mínimo. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Así obtenemos un mínimo local del coste a un radio determinado, consiguiendo un coste de valor 6.667, frente a un coste del potencial vector original de 25.8345. Vemos que la reducción ha sido significativa, logrando una implementación más eficaz del potencial vector en el interior de la estructura.

Si comparamos la distribución de la condición del potencial vector a lo largo del contorno de la estructura para este ejemplo, frente al caso general obtenemos:

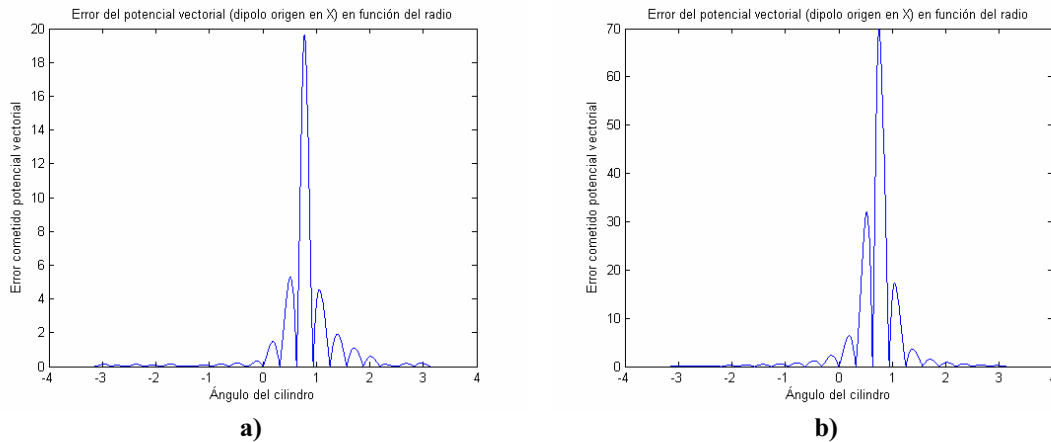


Figura 3.44 Comparación de la distribución de la condición del potencial vector en el contorno de un cilindro. a) Optimizando el radio. b) Método general. Empleo de 20 dipolos imagen y fuente situada en $(0.6\lambda, 0.6\lambda)$

Observamos como tenemos un máximo en el mismo punto (debido a la proximidad del dipolo fuente a la pared), aunque los valores de la condición se han reducido de forma sustancial, proporcionando una representación del potencial vector mucho más precisa.

En cuanto a la técnica empleada en el algoritmo de optimización del radio, se ha seguido la misma estrategia que en el potencial escalar, realizando un doble barrido:

- En primer lugar, emplearemos un paso “grueso”, variando el radio entre 1.000001λ y 30λ , con paso de 0.1λ . De esta forma logramos identificar la zona en la que el coste es mínimo (r_{opt}), siendo en la mayoría de las

ocasiones la diferencia entre un radio de 30λ y un mayor ínfima.

- En segundo lugar, emplearemos un paso “fino”, variando el radio muy cerca de la posición óptima anterior, r_{opt} , concretamente nos moveremos en el entorno: $[(r_{opt} - 0.1\lambda), (r_{opt} + 0.1\lambda)]$, con un paso de 0.001λ . Así obtendremos una posición del radio óptimo mucho más precisa, minimizando el coste.

Obtenemos dos posibles tipos de convergencia: a un mínimo local (como la mostrada en el ejemplo anterior) o una convergencia teórica en el infinito (que en la práctica queda reducida a valores menores de 30λ).

Mostraremos a continuación, al igual que hicimos anteriormente, cual es el valor final del coste obtenido en este método en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$. Mostraremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto a la ubicación inicial de cargas imágenes; también indicaremos el valor del radio óptimo que hemos obtenido en cada uno de los casos.

- a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:

Nº cargas		5	10	15	20	25	30
Tipo Técnica							
Point-matching		34.9888	14.9860	0.1174	1.3035e-3	2.8246e-5	7.3812e-7
Variación del radio	Error	23.9857	6.4980	4.7608e-2	2.4342e-5	2.6383e-9	1.4201e-13
	Radio	1.210 λ Mínimo local	7.500 λ Mínimo local	30.00 λ Converge	30.00 λ Converge	30.00 λ Converge	30.00 λ Converge

Tabla 3.38 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0\lambda, 0\lambda)$

Comprobamos como obtenemos un resultado mejor que el método original en todos los casos, con reducciones del coste muy importantes.

Un ejemplo de cuando el menor coste se sitúa cerca del infinito, alejando al máximo los dipolos imagen lo tenemos en esta posición al emplear 15 imágenes:

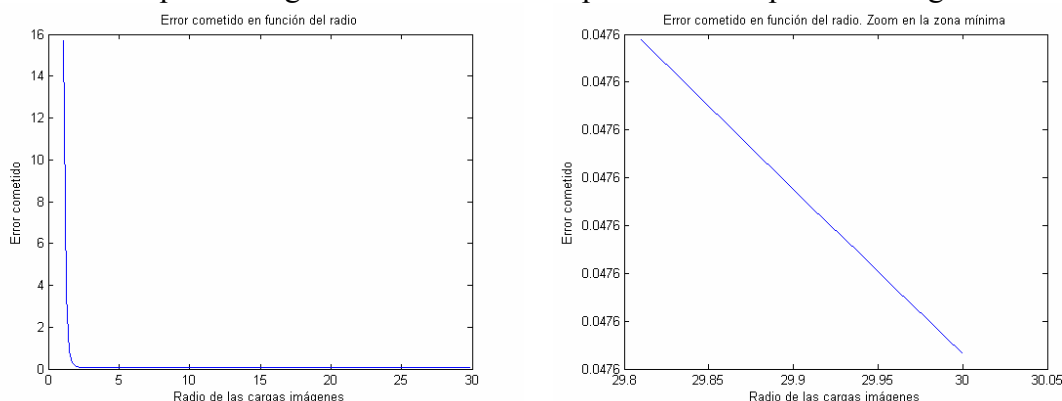


Figura 3.45 Ejemplo de convergencia del coste del potencial vector en el infinito. 15 imágenes, fuente en el origen de coordenadas.

- *b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº cargas		5	10	15	20	25	30
Tipo Técnica							
Point-matching		31.1104	31.9765	1.3449	1.5561e-2	1.5819e-4	3.7200e-6
Variación del radio	Error	22.7601	16.6434	0.7416	2.2103e-3	2.7185e-5	1.0271e-6
	Radio	1.280 λ Mínimo local	30.00 λ Converge	2.0700 λ Mínimo local	3.1900 λ Mínimo local	2.500 λ Mínimo local	2.2800 λ Mínimo local

Tabla 3.39 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- *c) Posición $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$:*

Nº cargas		5	10	15	20	25	30
Tipo Técnica							
Point-matching		64.0995	62.1398	3.6035	0.1014	6.3463e-4	1.1809e-5
Variación del radio	Error	24.5626	18.3595	1.5567	1.3308e-2	7.3222e-4	6.2745e-5
	Radio	1.230 λ Mínimo local	1.230 λ Mínimo local	1.7600 λ Mínimo local	3.3800 λ Mínimo local	2.090 λ Mínimo local	2.3700 λ Mínimo local

Tabla 3.40 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0\lambda)$

En ocasiones, como en el caso de emplear esta posición y 15 dipolos imágenes, pueden aparecer dos convergencias: un mínimo local y una convergencia final en el infinito. El doble barrido es muy útil para identificar las dos y poder discernir cual de ellas nos proporcionará un coste menor:

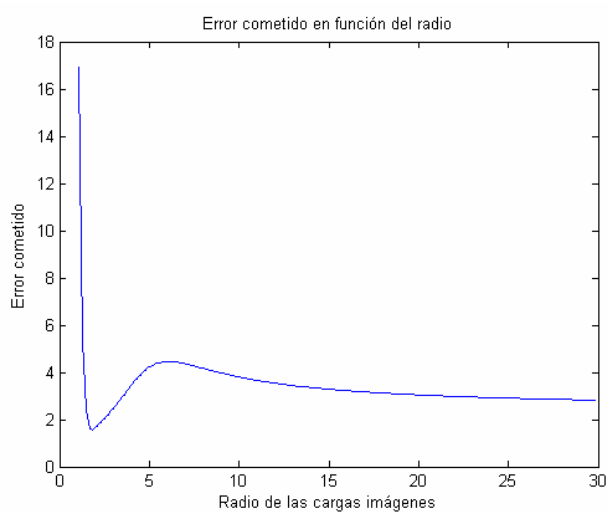


Figura 3.46 Variación de la condición del potencial vector en el contorno del cilindro en función del radio, existiendo 2 mínimos. 15 cargas imágenes y fuente en $(0.4\lambda, 0.0\lambda)$

- d) Posición $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		57.1065	90.6108	10.4649	0.7906	1.1148e-2	4.2507e-4
Variación del radio	Error	25.3086	18.5186	3.6720	0.2095	2.3337e-2	9.277e-3
	Radio	1.190 λ Mínimo local	1.270 λ Mínimo local	1.630 λ Mínimo local	1.7800 λ Mínimo local	1.7400 λ Mínimo local	1.650 λ Mínimo local

Tabla 3.41 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.4\lambda, 0.4\lambda)$

Comprobamos como en esta posición hay dos casos en los que una variación del radio no proporciona un coste menor que el original. Esto se produce para un número de imágenes relativamente elevado (25-30) cuando el error ya es reducido. Comprobamos como conforme se va acercando el dipolo fuente a la pared, la variación del radio va proporcionando unos resultados más modestos al usar un número de dipolos imagen elevado.

- e) Posición $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		70.9312	83.0511	7.2793	0.3847	3.1735e-3	7.6270e-5
Variación del radio	Error	24.0265	18.2668	2.6496	6.1674e-2	5.9330e-3	8.4696e-4
	Radio	1.240 λ Mínimo local	1.240 λ Mínimo local	1.630 λ Mínimo local	2.410 λ Mínimo local	1.940 λ Mínimo local	2.160 λ Mínimo local

Tabla 3.42 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.5\lambda, 0.0\lambda)$

- f) Posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$:

Nº cargas Tipo Técnica		5	10	15	20	25	30
Point-matching		167.0453	159.1433	85.0425	245.5419	535.3140	378.9134
Variación del radio	Error	158.192	156.153	151.083	144.478	144.8139	144.3359
	Radio	1.140 λ Mínimo local	1.100 λ Mínimo local	1.050 λ Mínimo local	1.410 λ Mínimo local	1.040 λ Mínimo local	1.160 λ Mínimo local

Tabla 3.43 Coste vectorial variación radio para distintos nº de cargas, posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Podemos observar como en casi todos los casos obtenemos un coste mucho menor que con la técnica original, incluyendo la posición $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$. No obstante a pesar de mejorar los resultados originales, los costes obtenidos son muy elevados, dando lugar a aproximaciones del potencial vector relativamente imprecisas. Ello es debido a que el dipolo fuente se encuentra muy próximo a la pared del cilindro, por lo que produce un pico de potencial en ella que los dipolos imágenes de nuestro método, al estar situadas de forma simétrica alrededor del cilindro, no pueden contrarrestar.

Al igual que ocurría con este método al optimizar el potencial escalar, el error se disminuye de una forma más drástica cuando el número de cargas imágenes es reducido (ó el coste inicial de partida muy elevado) y de una forma más moderada cuando el número de cargas imágenes es más elevado.

Siempre existirá un coste mínimo, que se producirá en un mínimo local o cuando el algoritmo converja a un valor determinado.

Como principal desventaja de este método, señalaremos que *el coste computacional para conseguir los resultados es relativamente alto*, pues debemos de calcular los potenciales para un gran número de situaciones y obtener el Coste para cada uno de ellos (operación computacionalmente costosa)

Para concluir, podemos considerar *la técnica como muy satisfactoria* pues es muy efectiva en la gran mayoría de los casos, simple y fácilmente extensible a una geometría arbitraria.

3.3.3 Conclusiones

En este apartado hemos analizado el potencial vector, y las características que se han de cumplir para encontrar una representación adecuada. Para ello, dedujimos un Coste asociado a cada situación, matemáticamente mucho más complejo que en el caso del potencial escalar. Este coste se basa en el cumplimiento de dos condiciones impuestas en la ecuación 3.65, a lo largo de todo el contorno de la cavidad. Presentamos resultados sobre la distribución de estas condiciones, tanto de forma individual como conjunta, obteniendo finalmente el coste asociado a la representación del potencial vector.

Una vez definido de forma adecuada, pasamos a tratar de minimizar su coste. Para ello, nos centramos en la optimización del radio al ubicar los dipolos imagen en un círculo que englobara a la estructura a analizar, pues fue el método que mejor resultado dio en el análisis del potencial vector y con el que hemos conseguido unas reducciones del coste más que satisfactorias para la mayoría de los casos. Este método presenta la ventaja añadida de que es fácilmente extensible a geometrías arbitrarias.

No obstante este es un tema en el que es posible una mayor profundidad, pudiéndose realizar un análisis más extenso que incluya otro tipo de optimizaciones: introducción de nuevas condiciones de contorno en los picos, e incluso, aplicación de algoritmos de gradiente descendente (con una cierta complejidad matemática)

De esta forma tenemos totalmente caracterizado el potencial vector; se ha hallado una medida de su corrección y se ha encontrado un método que permita minimizarla en un gran número de ocasiones.

3.4 Software desarrollado

Para el desarrollo del software empleado en el presente capítulo, se ha partido de la base del creado en el capítulo anterior, tanto de los programas en Fortran 90 como en Matlab®.

Debido a la gran cantidad de programas y rutinas generadas, por motivos de espacio, no vamos a entrar en detalles descriptivos acerca de cada una.

Destacaremos que la entrada de datos a los distintos programas se realiza a través del fichero de configuración “Datos.in” (al igual que en los programas empleados en el capítulo anterior) donde se indicarán todos los parámetros: frecuencia, número de imágenes, posición de la fuente puntual en el interior del cilindro, etc.

En función del método empleado puede ser necesario algunos parámetros adicionales (como número de iteraciones de parada, o entre que distancias hacer los barridos del radio); en estos casos el propio fichero “Datos.in” mediante comentarios indica que parámetros espera.

Para la representación final de los resultados, se emplearán scripts de Matlab® ubicados en los “resultados” de cada programa. Estos scripts darán resultados gráficos, como la evolución del coste de los algoritmos de descenso de gradiente en función del número de iteraciones, la distribución del coste a lo largo del cilindro, variación del coste en función de la variación del radio ó la representación en 2D de la situación que estamos analizando (imágenes, fuente, etc).

Estos scripts tomarán la información de forma automática de los resultados proporcionados por los programas en Fortran 90, por lo que no necesitan ningún parámetro de entrada.

Finalmente destacar que todos los programas se encuentran debidamente comentados para clarificar su uso, así como qué han sido programados para que funcionen de la manera más automática posible: partiendo únicamente de unos datos de entrada genera toda la información para la visualización gráfica de los resultados.

4. Extensión de la formulación espacial de Green a estructuras arbitrarias

4.1 Introducción

En este cuarto capítulo vamos a desarrollar la formulación espacial de imágenes para el cálculo de las funciones de Green en estructuras de geometría arbitraria *infinitesimal*, siendo necesario para ello la extensión de la formulación a tramos rectos en lugar de superficies cilíndricas como se había desarrollado en el capítulo 2.

La técnica a emplear será muy similar a la anterior: ubicaremos cargas ó dipolos imágenes fuera de la estructura. Su situación y orientación se calculan mediante la imposición de las condiciones de contorno para los potenciales en puntos discretos de la pared metálica. Conseguimos una convergencia rápida, con unos resultados satisfactorios capaces de usarse para el análisis de estructuras reales.

En este capítulo *nos vamos a centrar en la formulación para fuentes eléctricas*; la formulación para fuentes magnéticas no es dual (pues aunque cambian el tipo de fuente no cambia el tipo de pared, por lo que cumplirán condiciones de contorno distintas), pero sigue un desarrollo idéntico a partir de la formulación en cilíndricas.

Desarrollaremos de forma detallada la formulación con tramos rectos para fuentes eléctricas, explicando sus características, ecuaciones resultantes y diferencia con la formulación cilíndrica.

Una vez obtenida la formulación, nos centraremos en la descripción de estructuras arbitrarias: implementaremos un software capaz de reconocer cualquier tipo de estructura (leyendo su formato de un archivo de texto), imponer sobre la misma las condiciones de contorno de los potenciales en puntos discretos (existiendo varias variantes sobre como realizar este proceso) y ubicando finalmente las cargas/dipolos imagen alrededor de la estructura (existiendo nuevamente posibles alternativas en este paso).

De esta forma, podemos analizar los potenciales en el interior de cualquier tipo de estructura de forma automática, sin más que describir la misma de forma sencilla en un fichero de texto.

Una vez obtenidos los potenciales en cualquier tipo de estructura introducida, obtendremos un '*coste*' de su implementación, para saber la corrección de los mismos. Se ha calculado este coste tanto para el potencial escalar como para el potencial vector, así como la distribución del mismo a lo largo del contorno de cualquier estructura. Todos estos cálculos se realizan de forma automática.

Así, analizaremos distintas estructuras de guías de onda simples (cuadrado, rectángulo, cuadrado con dos lados redondeados, ridge, rombo, triángulo, etc.) obteniendo los potenciales en su interior y analizando la distribución del coste de su implementación en su contorno. Obtendremos donde se ubican las principales fuentes de error (fundamentalmente en esquinas y entrantes) y trataremos de reducirlas.

Para reducir estos errores, realizaremos una optimización del coste del potencial tanto escalar como vectorial sobre estructuras arbitrarias. Emplearemos para ello técnicas expuestas en el capítulo 3 que extrapolaremos de forma natural a geometrías arbitrarias: variación dinámica del radio al situar las cargas/dipolos de forma circular (esta técnica será realizada tanto para optimizar el potencial escalar como el potencial vector), variación de la distancia a la que ubicar las imágenes respecto a la fuente,

optimización por gradiente del valor complejo de las cargas y de las posiciones. De esta forma, tratamos de obtener la representación de los potenciales con el menor error posible.

Finalmente, realizaremos una comparación del potencial en el interior de una grúa cuadrada con una altura en el eje 'z' teóricamente infinita con el potencial calculado con el presente método (que considera un corte en 'z' infinitesimal). A pesar de que físicamente no estamos representando la misma magnitud, obtenemos unas similitudes muy importantes, dando a pie a la introducción en el capítulo 5 de guías en 3D (y no en una estructura bidimensional como hemos analizado hasta la fecha).

Al igual que en capítulos anteriores, y basándonos en su código fuente, la programación ha sido realizada en el lenguaje FORTRAN 90 ©; para la representación gráfica de los resultados se ha optado por Matlab ©, usando ficheros de datos intermedios para la comunicación entre ambos entornos.

4.2 Formulación espacial de Green en tramos rectos

4.2.1 Desarrollo de la Formulación

En este apartado realizaremos una extensión de la formulación espacial de Green expuesta en el capítulo 2, para poder tratar tramos rectos en estructuras infinitesimales.

Aunque la formulación que estamos desarrollando es extensible a cualquier estructura, vamos a basarnos en este desarrollo en la estructura cuadrada de la figura 4.1, sin pérdida de generalidad.

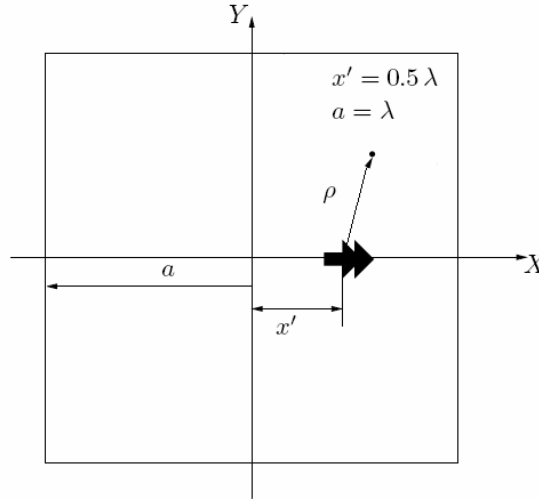


Figura 4.1 Dipolo unitario situado en el interior de una cavidad cuadrada

Si situamos una fuente eléctrica en el interior de la estructura, el campo que creará será de:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla V = -j\omega\vec{A} - j \frac{\nabla(\nabla\vec{A})}{\omega\mu\epsilon} \quad (4.1)$$

De esta forma vamos a obtener los potenciales en el interior de la estructura, de un modo análogo al desarrollado en el tema 2.

a) Potencial escalar

El cálculo del potencial escalar sigue un desarrollo totalmente paralelo al realizado en el capítulo 2; impondremos la condición de contorno que será un potencial nulo a lo largo de la pared de la estructura, independientemente de la forma que ésta adquiera. Al igual que ocurría con la formulación cilíndrica, nos centraremos en puntos discretos de la pared (Point-Matching) denominando a uno cualquiera punto tangente 'i'.

La técnica empleada es utilizada hasta la fecha: sobre este punto tangente impondremos las condiciones de contorno del potencial escalar (y posteriormente vector), mediante una carga (dipolo) imagen situada alrededor de la estructura. Posteriormente, extenderemos este único punto a un conjunto de puntos, obteniendo un conjunto de sistemas de ecuaciones.

No nos detendremos en examinar las distintas formas de ubicar las cargas imágenes alrededor de la estructura ni las posiciones de la pared en donde cumplir las condiciones; se han desarrollado varios métodos que serán expuestos en un apartado posterior.

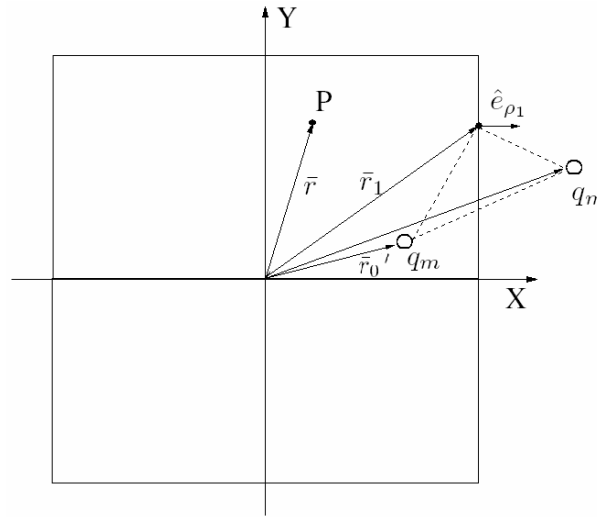


Figura 4.2 Ubicación de una condición de contorno G_v en la pared de una guía cuadrada

Tras ubicar un punto tangente a la estructura donde imponer la condición de contorno (que para el caso del potencial escalar es que sea nulo), ubicaremos la posición de una carga imagen para cumplir ese requisito. Así, en este primer punto 'i' lograremos un potencial escalar nulo imponiendo que los potenciales de las cargas se anulen en dicho punto:

$$q_1 \cdot G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_1') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o')$$
(4.2)

Por tanto, el efecto de la carga fuente y de la carga imagen proporcionarán un potencial escalar en todo el cilindro de:

$$G_{v_{cyc}}(\vec{r}) = G_v(\vec{r}, \vec{r}_o') + q_1 \cdot G_v(\vec{r}, \vec{r}_1')$$
(4.3)

Siendo $G_v(\vec{r}, \vec{r}')$ el potencial de una carga en condiciones de espacio libre:

$$G_v(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jko|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
(4.4)

Vemos que el desarrollo es similar al mostrado en el capítulo 2; en este punto extenderemos la condición de potencial nulo a un conjunto de N puntos tangentes a la estructura. Así, obtendremos un sistema de ecuaciones que nos proporcionará el valor complejo de las cargas imágenes capaces de otorgar a los N puntos de la estructura un valor de potencial nulo.

Comprobamos como extendiendo la ecuación 4.3 a un conjunto de N puntos tangentes de la estructura tenemos un sistema idéntico al obtenido en el capítulo 2 (2.8)

$$\sum_{k=1}^N q_k G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \quad (4.5)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

De esta forma el cálculo del potencial escalar es *independiente de la estructura*, pues no debemos de coger un sistema de coordenadas particular ni hemos realizado ninguna suposición de partida.

Tras resolver el sistema de ‘ N ’ ecuaciones obtendremos los valores complejos de las ‘ N ’ cargas imágenes (q_k) que son necesarias para satisfacer las condiciones de contorno en los ‘ N ’ puntos tangentes establecidos. Finalmente, obtenemos el potencial escalar en el interior del cilindro mediante la ecuación 4.6:

$$G_{v_{cy}}(\vec{r}) = G_v(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k \cdot G_v(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (4.6)$$

b) Potencial vector

El cálculo del potencial vector si que presenta unas diferencias significativas al realizar su formulación para tramos rectos (para lo cual emplearemos coordenadas cartesianas) frente a la formulación en cilíndricas realizada en el capítulo 2.

Supongamos un tramo general, por ejemplo oblicuo, como el mostrado en la figura 4.3:

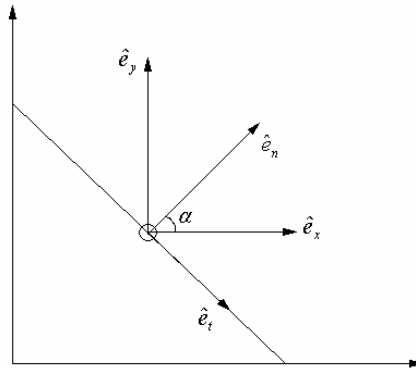


Figura 4.3 Tramo oblicuo y sus ejes de coordenadas

Comprobamos como podemos destacar inicialmente dos vectores, el vector tangencial al tramo \hat{e}_t y el vector normal, \hat{e}_n . Estos dos vectores los podemos descomponer a su vez en los ejes de coordenadas cartesianos, \hat{e}_x y \hat{e}_y .

La condición que debe de cumplir un punto tangente a la estructura a analizar (por ejemplo la guía cuadrada de la figura 4.2) es que la componente tangencial del campo eléctrico (definido en la ecuación 4.1) sea nula:

$$\vec{E}_{ptoi} \cdot \hat{e}_t = 0 \quad (4.7)$$

lo que conlleva a dos diferentes condiciones, obtenidas tras analizar el campo eléctrico \vec{E} definido por la ecuación 4.1

$$\hat{e}_n \times \vec{A} = 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.9)$$

Estas dos condiciones deben cumplirse de forma conjunta sobre un punto de la pared de la estructura ‘i’, y son las mismas condiciones de partida que obtuvimos al realizar la formulación en coordenadas cilíndricas.

El método propuesto para satisfacer estas condiciones es el mismo: emplear dos dipolos eléctricos ortogonales (situados uno en el eje ‘x’ y otro en el eje ‘y’).

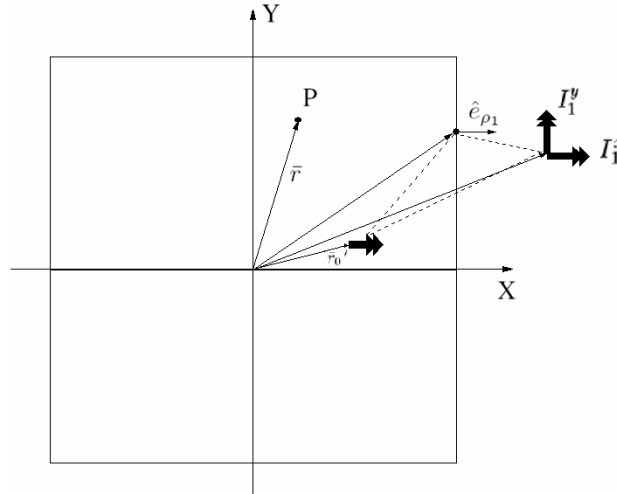


Figura 4.4 Ubicación de una condición de contorno del potencial vector en la pared de una guía cuadrada

Tanto la elección de los puntos tangentes a la estructura como la ubicación de los dipolos imagen alrededor de la misma serán estudiados posteriormente, sin ninguna pérdida de generalidad de la formulación propuesta.

Vamos a analizar como imponer las condiciones 4.8 y 4.9 sobre un punto cualquiera ‘i’ de la pared de la estructura:

1) $\hat{e}_n \times \vec{A} = 0$

En primer lugar, descompondremos el vector potencial \vec{A} :

$$\vec{A} = G_A^{xx} \cdot \hat{e}_x + G_A^{yx} \cdot \hat{e}_y \quad (4.10)$$

Verificando en el punto ‘i’ que:

$$\hat{e}_n \times \vec{A} = \hat{e}_n \times (G_A^{xx} \cdot \hat{e}_x + G_A^{yx} \cdot \hat{e}_y) = -\sin(\varphi) \cdot G_A^{xx} + \cos(\varphi) \cdot G_A^{yx} = 0 \quad (4.11)$$

Observamos como la ecuación 4.11 presenta la misma forma que la obtenida para cavidades circulares (con formulación cilíndrica), por lo que su desarrollo a partir de este punto es idéntico.

$$2) \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Teniendo en cuenta la condición 4.8, observamos que la derivada respecto de la tangente de la componente tangencial del vector \vec{A} es nula:

$$\hat{e}_n \times \vec{A} = 0 \rightarrow \frac{\partial A_t}{\partial t} = 0 \quad (4.12)$$

En segundo lugar, expresaremos la divergencia el vector potencial \vec{A} en términos de sus componentes tangencial y normal:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_t}{\partial t} + \frac{\partial A_n}{\partial n} = \frac{\partial A_n}{\partial n} \cdot \hat{e}_n = 0 \quad (4.13)$$

Así adecuamos la forma de la ecuación 4.9 a una más sencilla de trabajar:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_n}{\partial n} \cdot \hat{e}_n = (\nabla \cdot \vec{A}_n) \cdot \hat{e}_n = 0 \quad (4.14)$$

Descomponiendo la componente normal del vector potencial:

$$A_n = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi) \quad (4.15)$$

En este punto ya podemos desarrollar la ecuación 4.14:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{A}_n) \cdot \hat{e}_n &= \left(\frac{\partial A_n}{\partial x} \cdot \hat{e}_x + \frac{\partial A_n}{\partial y} \cdot \hat{e}_y \right) \cdot \hat{e}_n = \left(\frac{\partial A_n}{\partial x} \cdot \hat{e}_x \cdot \hat{e}_n + \frac{\partial A_n}{\partial y} \cdot \hat{e}_y \cdot \hat{e}_n \right) = \frac{\partial A_n}{\partial x} \cos(\varphi) + \frac{\partial A_n}{\partial y} \sin(\varphi) = \\ \cos^2(\varphi) \frac{\partial A_x}{\partial x} + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial A_y}{\partial x} + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial A_x}{\partial y} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial A_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Finalmente deberemos de desarrollar las derivadas de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} &= \frac{\partial G_A^{xx}}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} &= \frac{\partial G_A^{xx}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} &= \frac{\partial G_A^{yx}}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \frac{\partial G_A^{yx}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Estas derivadas pueden ser formuladas para un medio multicapa estratificado, formulado en el dominio espectral mediante las integrales de Sommerfeld [9], como veremos en el capítulo 5.

No obstante, para el caso del espacio libre el problema se simplifica pues se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desarrollaremos estas derivadas, pues son analíticas. Concretamente, nos centraremos en primer lugar en el cálculo de $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, pudiendo obtener $\frac{\partial A_x}{\partial y}$ mediante un desarrollo totalmente similar.

Partimos de la expresión de la distancia euclídea de dos puntos en el plano:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Obtendremos posteriormente la derivada de la ecuación anterior respecto a la dirección del eje 'x':

$$\begin{aligned} \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx} &= \frac{d[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2} * [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{\frac{1}{2} - 1} * 2(x - x') * (1) = \\ &= \frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = \frac{x - x'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, obtenemos la derivada final buscada:

$$\begin{aligned} \frac{dA_x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{-j * k * e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx} * |\bar{r} - \bar{r}'| - \frac{d|\bar{r} - \bar{r}'|}{dx} * e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} = \\ &= \frac{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'| * e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * \frac{x - x'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} * -e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * \frac{x - x'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} = \\ &= \frac{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'| * e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (x - x') * -e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (x - x')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (x - x') * (-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'| - 1)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \\ &= \frac{-e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (x - x') * (1 + j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Tras añadir las constantes, obtenemos el resultado final buscado:

$$\frac{dA_x}{dx} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{-e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (x - x') * (1 + j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (4.22)$$

Este desarrollo es totalmente dual para $\frac{dA_x}{dy}$, obteniendo un resultado:

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{-e^{-j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|} * (y - y') * (1 + j * k * |\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (4.23)$$

En este punto tenemos totalmente definida la ecuación 4.14, que nos permitía cumplir la condición 4.9.

Una vez analizadas las dos condiciones para un punto cualquiera 'i' tangente a la estructura, vamos a extender la formulación a un total de N puntos, con el fin de que las condiciones impuestas se verifiquen en el conjunto de la estructura.

Para ello analizaremos nuevamente las condiciones 4.8 y 4.9, extendiendo sus resultados para que satisfagan las condiciones en todos los puntos de la estructura. En este análisis, consideraremos que existe un dipolo en el interior, orientado a lo largo del eje 'x'. La formulación para el caso de que esta orientación sea en el eje 'y' es totalmente dual.

$$1) \hat{e}_n \times \vec{A} = 0$$

Partiendo de la ecuación 4.11, su equivalente con un total de 'N' puntos tangentes será:

$$- \sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^x + \cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^y = \sin(\varphi) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0) \quad (4.24)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Ecuación que coincide de forma exacta con la obtenida con la formulación realizada para estructuras circulares.

$$2) \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Si extendemos la condición de la ecuación 4.16 a un total de 'N' puntos tangentes, deberemos de agrupar las componentes 'x' e 'y' de \vec{A} (en función del dipolo imagen que los crea), obteniendo así:

$$\sum_{k=1}^N (\cos^2(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x} + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y}) \cdot I_k^x + \sum_{k=1}^N (\sin^2(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x}) \cdot I_k^y =$$

$$- (\cos^2(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_0)}{\partial x} + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_0)}{\partial y}) \quad (4.25)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Trataremos de simplificar la ecuación anterior, sacando factor común:

$$\cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N (\cos(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y}) \cdot I_k^x + \sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N (\sin(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} + \cos(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x}) \cdot I_k^y =$$

$$- \cos(\varphi) \cdot (\cos(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_0)}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_0)}{\partial y}) \quad (4.26)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Pudiéndose expresar como:

$$\cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x \cdot I_k^x + \sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y \cdot I_k^y = - \cos(\varphi) \cdot C_{i,0}^y \quad (4.27)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Donde hemos definido las constantes:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \cos(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{dx} + \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{dy} \\ C_{i,k}^y &= \sin(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{dy} + \cos(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{dx} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Al estar en espacio libre, ambas constantes de la ecuación 4.28 coincidirán,

$$C_{i,k}^x = C_{i,k}^y \quad (4.29)$$

ya que se satisface la ecuación 4.18.

En este punto, obtenemos un sistema de ecuaciones de dimensión $2N \times 2N$ formado por las ecuaciones 4.24 y 4.27 cuya solución nos dará los pesos de los dipolos imagen (tanto los orientados a lo largo del eje 'x' como del eje 'y').

Así, el sistema final será:

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^x + \cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^y &= \sin(\varphi) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0) \\ \cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x \cdot I_k^x + \sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y \cdot I_k^y &= -\cos(\varphi) \cdot C_{i,0}^y \\ i &= 1, 2, 3 \dots N \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tras resolverlo, obtendremos el valor del potencial vector en el interior de la estructura:

$$\begin{aligned} G_{Acy}^{xx}(\vec{r}) &= G_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0') + \sum_{k=1}^N I_k^x \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \\ G_{Acy}^{yx}(\vec{r}) &= \sum_{k=1}^N I_k^y \cdot G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \end{aligned} \quad (4.31)$$

De esta forma, se ha extendido la formulación de la función espacial de Green a tramos rectos (empleando para ello coordenadas cartesianas), pudiéndose aplicar en el análisis de cualquier estructura.

4.2.2 Validación de los resultados

En este punto vamos a validar la formulación desarrollada en el apartado anterior, empleando para ello los resultados de la formulación para una estructura cilíndrica cuya validez fue demostrada en [6] y en [7].

Supongamos un cilindro de radio $a = \lambda$, (siendo la frecuencia de 300Mhz) en el que situamos la carga/dipolo fuente en el centro del cilindro y empleamos un total de 20 imágenes para calcular los potenciales.

Bajo estas condiciones, las dos formulaciones empleadas deben de dar un resultado similar; la ubicación de los puntos de la estructura en la que establecer las condiciones de contorno y la posición de las imágenes en el espacio se han hecho coincidir. Así, bajo los dos puntos de vista, la situación que estamos analizando es la siguiente:

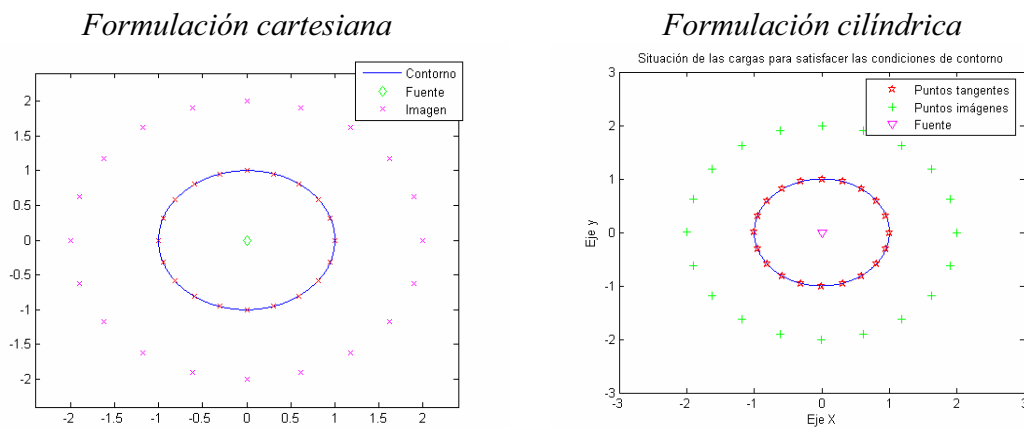
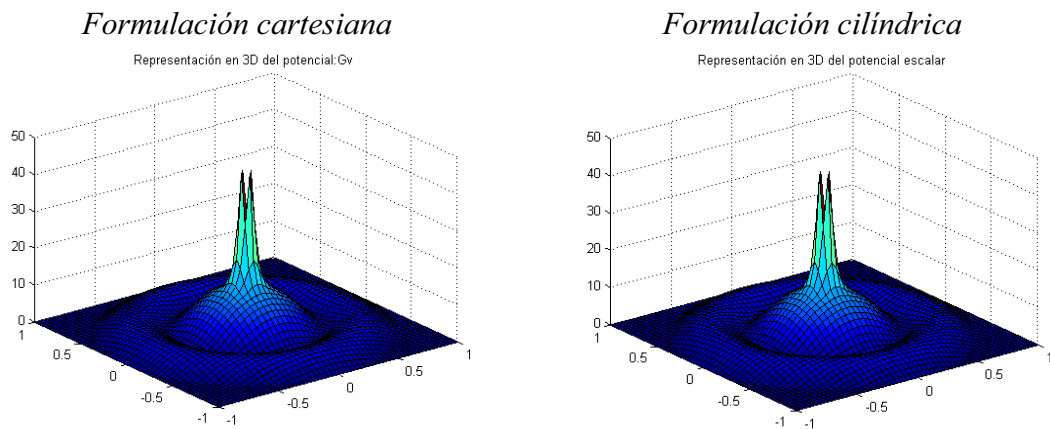


Figura 4.5 Estructura cilíndrica, de radio $a = \lambda$, analizada con 20 imágenes y fuente situada en el centro. Perspectivas de formulación cartesiana y formulación cilíndrica.

En este apartado mostraremos como los resultados coinciden plenamente, dejando el tratamiento de la estructura bajo formulación cartesiana para un apartado posterior.

En primer lugar, comprobamos como el potencial escalar coincide de forma exacta:



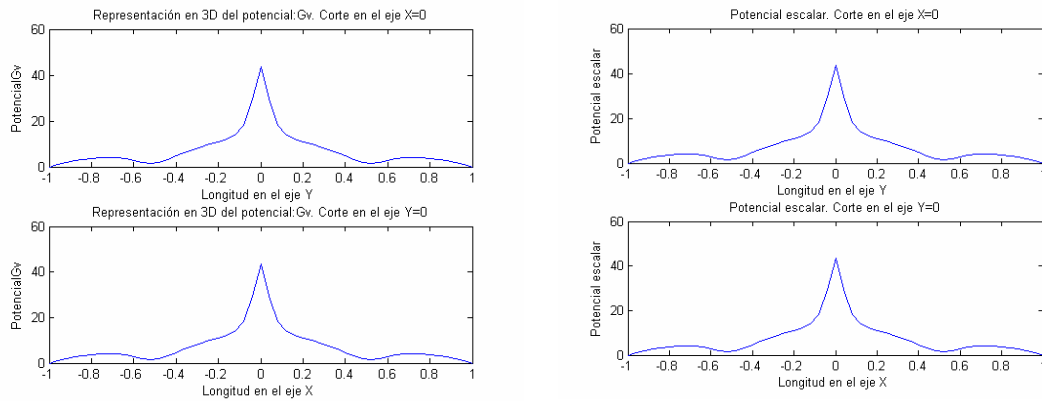
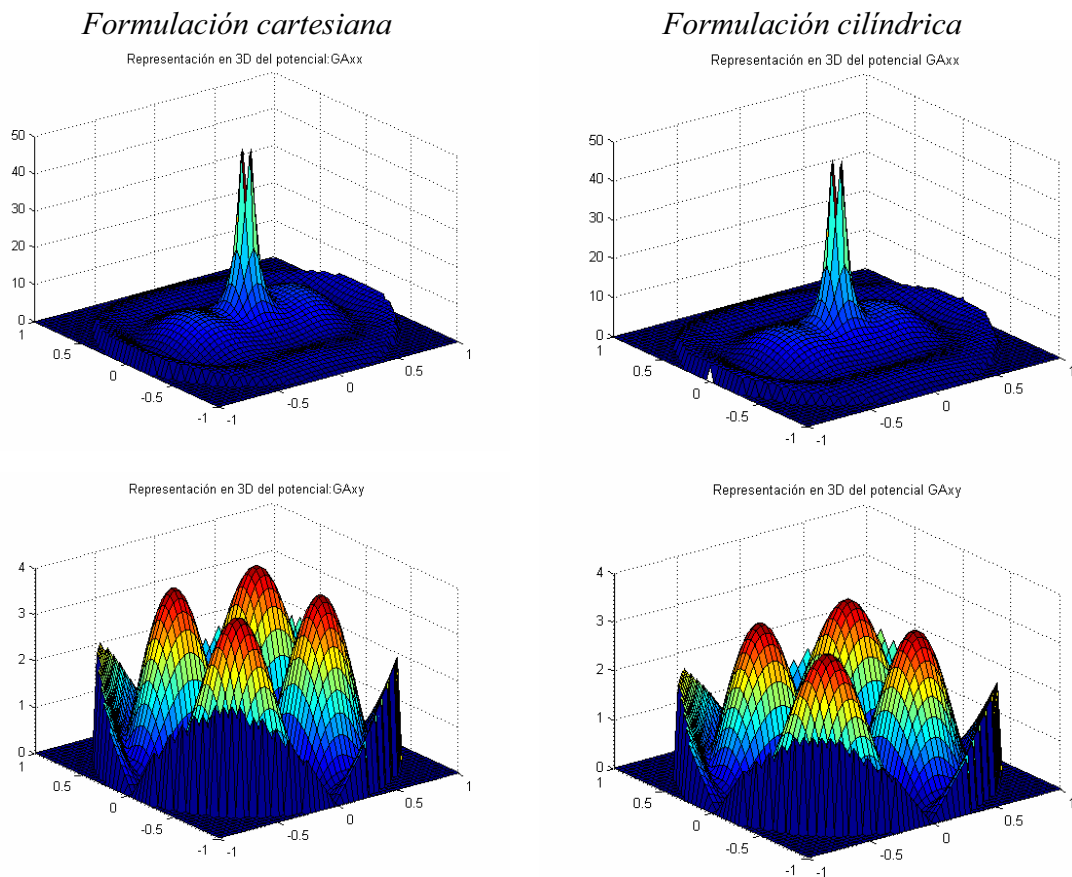


Figura 4.6 Comparación del potencial escalar en un cilindro bajo las formulaciones cartesiana y cilíndrica. 20 imágenes, fuente en el origen.

Observamos como la reconstrucción del potencial escalar coincide de forma plena; este primer resultado no es definitivo, pues para este potencial las dos formulaciones coincidían. No obstante, si que ha cambiado de forma sustancial (como veremos posteriormente) el tratamiento automático de la estructura, para no depender de su geometría y obtener así los potenciales de forma genérica.

Si comparamos el potencial vector, observamos que el resultado vuelve a coincidir:



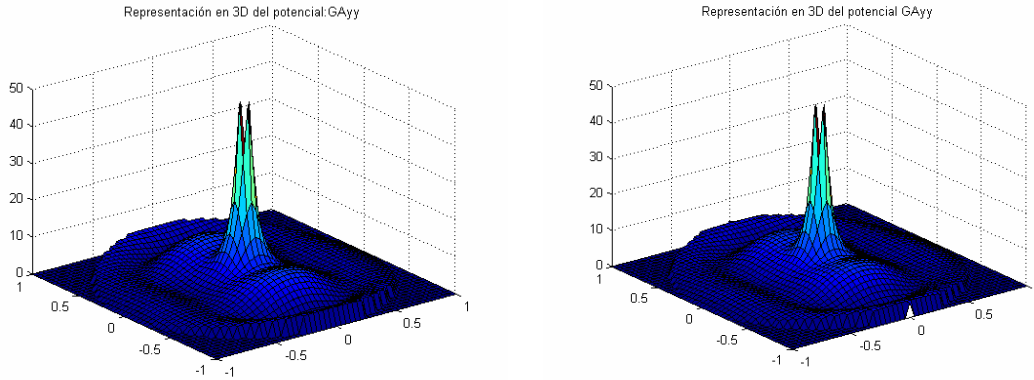


Figura 4.7 Comparación del potencial vector en un cilindro bajo las formulaciones cartesiana y cilíndrica. 20 imágenes, fuente en el origen.

Podemos comprobar como los resultados son plenamente satisfactorios, habiendo obtenido la representación de los potenciales de forma correcta.

De forma rigurosa, se aprecia una pequeña diferencia en la singularidad (es decir donde se encuentra ubicada la carga fuente), debida al mallado realizado y al tratamiento de la estructura; no obstante el potencial en el punto exacto de la carga/dipolo fuente tiende a infinito, por lo que es normal que aparezcan unas diferencias (aunque en este caso mucho más reducidas de lo que se esperaban) al realizar el cálculo con técnicas diferentes.

Se han realizado pruebas de convergencia, de comparación de cortes, de variación de número de imágenes, etc. En todas ellas, las dos formulaciones han proporcionado unos resultados prácticamente iguales (tal y como se esperaba). De esta forma, se muestra la corrección de la nueva formulación planteada.

La ventaja que permite la formulación en coordenadas cartesianas es la aplicación a geometrías arbitrarias, por ejemplo cuadradas, rectangulares, triangulares, rombo, etc. estructuras que no se hubieran podido analizar bajo la formulación cilíndrica. Muchas de estas estructuras no tienen una solución de los potenciales analítica, por lo que este método abre las puertas a su cálculo con un coste computacional reducido.

4.3 Estructuras arbitrarias

4.3.1 Introducción

En este apartado vamos a realizar un estudio sobre los potenciales escalar y vector en estructuras arbitrarias, formadas por un número indefinido de tramos rectos y de tramos curvos de hasta 180°, pudiéndose combinar estos elementos de la forma en que se requiera.

Para ello, partiremos de las coordenadas de la estructura facilitada mediante un pequeño fichero de texto que nos definirá las posiciones de cada uno de los tramos, el tipo de tramo (recto o curvo), el centro del tramo curvo, el sentido de giro, etc. de tal forma que tengamos totalmente definida la estructura.

Una vez definida la estructura, el software creado se encargará de imponer de forma automática el número de puntos de la pared de la estructura sobre los que imponer las condiciones de contorno, existiendo varias posibilidades:

- De forma que los puntos tangentes a la estructura se encuentren equiespaciados en longitud.
- Asignando puntos tangentes a los vértices de la estructura, y distribuyendo el resto de forma equitativa.
- Asignar los puntos tangentes de forma uniforme, pero sin imponerlos en el vértice de la estructura.
- Variación dinámica del número de puntos tangentes en función de la distancia media del tramo a la posición de la carga/dipolo fuente.
- Etc.

Una vez situados los puntos tangentes alrededor de la estructura arbitraria, se situarán las cargas/dipolos imágenes. Para ello, nuevamente tenemos distintas alternativas:

- Situar las cargas/dipolos imágenes de forma circular alrededor de la estructura arbitraria, con un radio medio en función del tamaño de la estructura.
- Optimización de la técnica anterior, variando el radio de las cargas/dipolos imagen de tal forma que se optimice el coste de la implementación del potencial (tanto escalar como vector).
- Situar las cargas imágenes de forma simétrica (siguiendo la línea que une la carga fuente con el punto tangente a la estructura), tanto para los tramos rectos como para los tramos curvos.
- Variación del método anterior, en donde a los tramos curvos se les trata de forma distinta, empleando una recta tangente a cada punto condicionado de la estructura, que nos servirá de eje de simetría.
- Optimización del método general anterior, variando la distancia desde el punto tangente a la carga/dipolo imagen siguiendo la recta que une a ambos. Esta variación de la distancia nos permitirá una optimización del coste, tanto para el potencial escalar como para el potencial vector.
- Situar las cargas siguiendo el contorno de la estructura, independientemente de la ubicación de la fuente en su interior.

Realizaremos un estudio más exhaustivo de las distintas alternativas, en busca de un método general para la colocación de los puntos tangentes en el contorno de la estructura y la ubicación de las imágenes que los controlen.

Posteriormente, deberemos de aplicar la formulación desarrollada en el apartado 4.2 para volver a componer los potenciales, tanto escalar como vector.

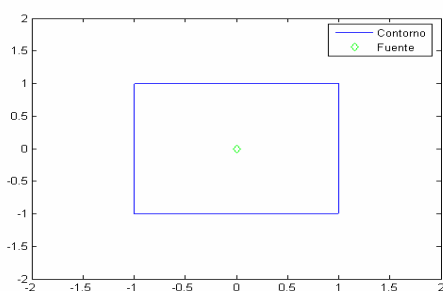
Otro problema encontrado al trabajar con estructuras arbitrarias es debido a la dificultad de discernir si un punto se encuentra en el interior o no de la misma. El software programado es capaz de realizar esta identificación, pudiéndose generar de esta forma representaciones en 3D de los potenciales en el interior de cualquier estructura arbitraria definida.

De esta forma, partiendo de una identificación sencilla de una estructura cualquiera, podremos calcular los potenciales en su interior de forma automática.

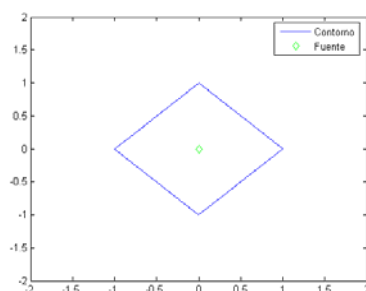
4.3.2 Creación de la estructura a analizar

El primer paso a llevar a cabo es definir el tipo de estructura que vamos a analizar. Podemos crear todo tipo de estructuras, con tramos rectos y curvos (que no sobrepasen 180°) y uniones de los mismos.

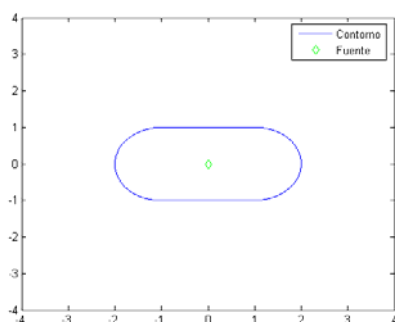
Algunos ejemplos de estructuras creadas:



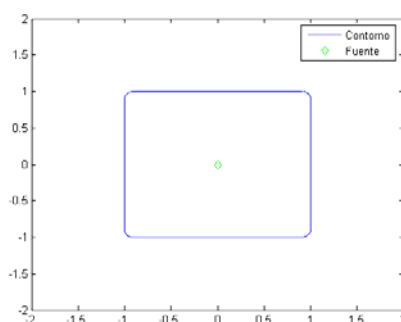
Guía cuadrada



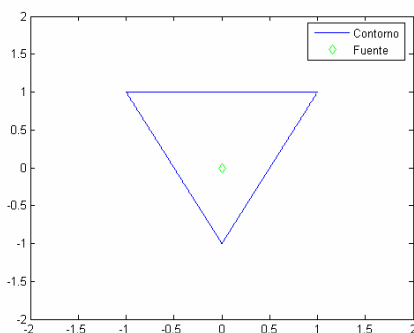
Guía rombo



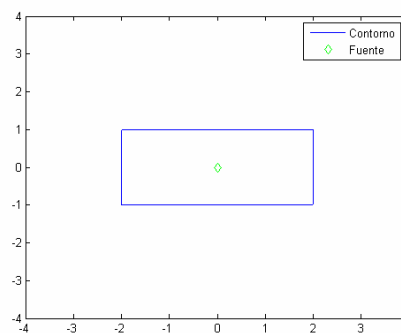
Guía cuadrada con dos lados redondeados



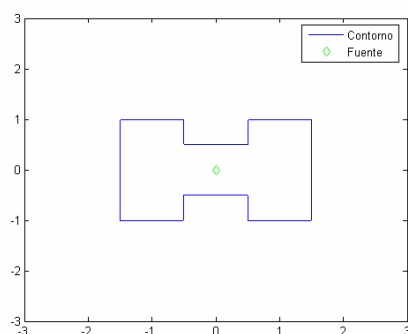
Guía cuadrada con bordes redondeados



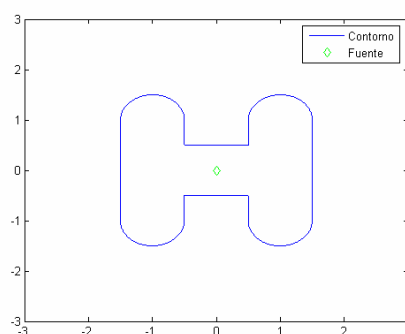
Guía triangular



Guía rectangular



Guía ridge



Guía ridge lados redondeados

Figura 4.8 Ejemplos varios de estructuras arbitrarias creadas.

La definición de la estructura la realizaremos mediante un fichero de entrada, denominado “Geom.in”, que contendrá las especificaciones de la misma.

El formato llevado a cabo para definir cualquier tipo de estructura formada por tramos rectos y tramos circulares se comenta a continuación, mediante un ejemplo. En el mismo, detallamos una figura de cierta complejidad, como una guía ridge con los bordes superiores e inferiores redondeados.

El fichero de entrada que nos definirá esa estructura es el siguiente:

! Fichero de configuración de la geometría de la cavidad

! Número de vértices

12

! Número de tramos curvos:

4

! Definiremos inicialmente, únicamente tramos rectos.

! Posiciones de los vértices.

1.5	1
0.5	1
0.5	0.5
-0.5	0.5
-0.5	1
-1.5	1
-1.5	-1
-0.5	-1
-0.5	-0.5
0.5	-0.5
0.5	-1
1.5	-1

! Definiremos los centros de los tramos curvos:

1	1
-1	1
-1	-1
1	-1

! Definiremos los tramos:

1				
1	2	1	0.5	1
0				
2	3			

0				
3	4			
0				
4	5			
1				
5	6	2	0.5	1
0				
6	7			
1				
7	8	3	0.5	1
0				
8	9			
0				
9	10			
0				
10	11			
1				
11	12	4	0.5	1
0				
12	1			
! Finalmente, indicaremos la posición de la carga fuente.				
0	0			

Figura 4.9 Fichero descriptor de una guía ridge con sus lados redondeados

Con esa configuración, la guía creada es la siguiente:

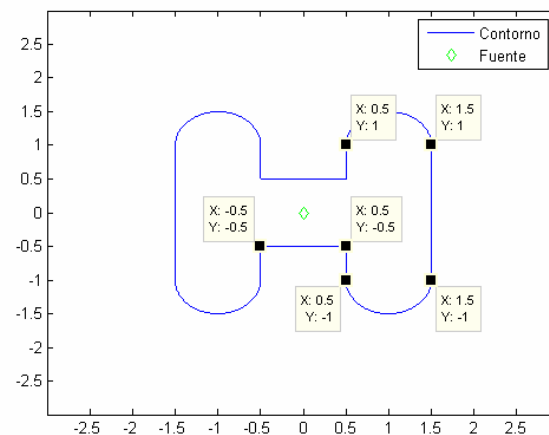


Figura 4.10 Ejemplo de guía ridge con lados redondeados

Donde observamos que hemos resaltado los vértices para una mejor visualización de las coordenadas.

Mostraremos a continuación como es el formato del fichero “Geom.in”, construyendo paso a paso la geometría anterior.

Para empezar a describir la guía, deberemos de indicar el número de vértices totales de que consta:

! Fichero de configuración de la geometría de la cavidad

! Número de vértices

12

a continuación, indicaremos el número de tramos curvos:

! Número de tramos curvos:
4

Posteriormente, indicaremos la posición de los distintos vértices (x,y) teniendo en cuenta que, la posición en la que los definamos será con la que posteriormente nos vamos a referir a ellos. Es decir:

! Definiremos inicialmente, únicamente tramos rectos.

! Posiciones de los vértices.

1.5	1	→ Define el vértice nº 1
0.5	1	→ Define el vértice nº 2
0.5	0.5	→ Define el vértice nº 3
-0.5	0.5	→
-0.5	1	
-1.5	1	
-1.5	-1	
-0.5	-1	
-0.5	-0.5	
0.5	-0.5	
0.5	-1	
1.5	-1	

Después, indicaremos la posición de los centros desde los cuales vamos a trazar los tramos curvos, teniendo en cuenta que volveremos a referenciarlos según su posición:

! Definiremos los centros de los tramos curvos:

1	1	→ Define el centro nº 1
-1	1	→ Define el centro nº 2
-1	-1	
1	-1	

Finalmente, indicaremos como vamos a unir los distintos vértices, distinguiendo en función de que sean tramos rectos ó curvos:

a) Tramos recto:

El formato general será del tipo:

0 → El '0' indica que la siguiente línea define un tramo recto.
2 3 → Indicamos el número relativo de los vértices que vamos a unir.

b) Tramos curvo

El formato general será del tipo:

1 → El '1' indica que la siguiente línea define un tramo curvo.
5 6 2 0.5 1

→ El '5' y el '6' definen los vértices origen y destino.
→ El '2' se refiere al número del centro al que hago referencia.
→ El '0.5' es el tamaño del radio del tramo curvo.
→ El '1' es el sentido de giro, que se definirá como:
+1 → Sentido contrario a las agujas del reloj.
-1 → Sentido de las agujas del reloj.

Por último escribiremos las coordenadas 'x' e 'y' de la situación de la fuente en el interior de la estructura:

! Finalmente, indicaremos la posición de la carga fuente.	
---	--

0	0
---	---

De esta forma, tenemos totalmente definida la estructura a analizar. En el ejemplo se ha analizado una guía relativamente compleja, que mezcla tanto tramos rectos como curvos. La descripción de estructuras más simples es mucho más sencilla y rápida.

Hasta ahora las estructuras diseñadas se han realizado siguiendo ciertas pautas, como indicando en primer lugar el vértice superior derecho e ir definiendo los tramos desde ese vértice hacia la izquierda de forma consecutiva.

Por último indicar que todas las medidas introducidas se encuentran metros (m), y que esta es la única unidad de medida que permite el software desarrollado.

4.3.3 Elección de puntos tangentes en el contorno de la estructura

Una vez definida la estructura arbitraria, vamos a seleccionar algunos puntos de su contorno sobre los que imponer las condiciones de los potenciales, sirviéndonos además en algunos casos de referencia a la hora de situar las cargas imágenes alrededor.

Si suponemos que tenemos que situar 'N' puntos en el contorno de una estructura arbitraria existen un gran número de métodos para realizarlo, de entre los cuales hemos implementado los que parecían más coherentes de forma física.

Cabe destacar que estos métodos se aplicaran a cualquier estructura (una vez definida en su fichero de configuración) de forma automática, independientemente del tipo de estructura en si. Los métodos propuestos son los siguientes:

a) Distribución por longitud uniforme

Este primer método consiste en distribuir el número de puntos tangentes que tengamos de forma uniforme entre todos los tramos, teniendo únicamente como referencia la longitud total de la estructura. De este modo, dividiendo esta longitud total entre el número total de puntos tangentes a distribuir, tendremos cada cuanta longitud deberemos de situar los puntos tangentes, de forma independiente al tramo al que pertenezca.

Así los tramos que tengan una mayor longitud tendrán un mayor número de puntos tangentes que aquellos tramos más cortos, que incluso puede que no tengan ninguno.

Un ejemplo de este tipo de distribución de puntos tangentes sería:

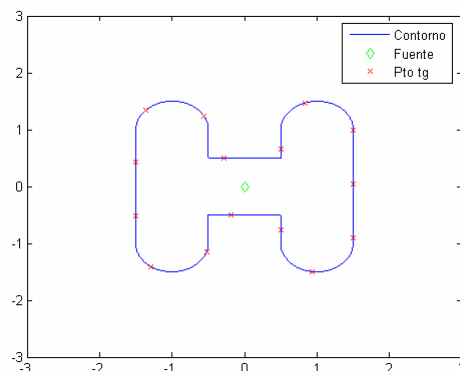


Figura 4.11 Distribución uniforme de 15 puntos tangentes en una guía ridge “redondeada”

En este caso, observamos como tenemos 15 puntos tangentes distribuidos de forma uniforme en la estructura de la guía ridge “redondeada”. Empezando por el vértice número 1 (situado en la parte superior derecha), vamos situando puntos tangentes de forma que se encuentren separados una longitud constante.

Otro ejemplo de distribución uniforme los tenemos en la guía triangular:

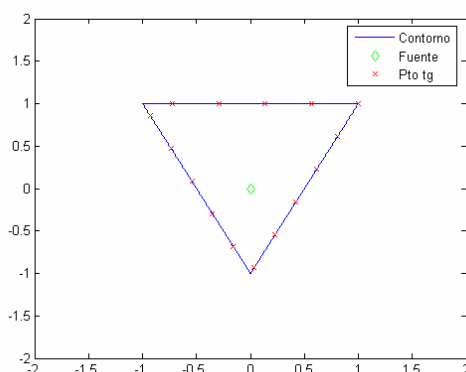


Figura 4.12 Distribución uniforme de 15 puntos tangentes en una guía triangular

Observamos como en este caso tras empezar a ubicar los puntos tangentes desde el vértice superior derecho, ningún otro vértice recibe un punto tangente.

b) Distribución por vértices y por mitades de segmentos

En este caso la distribución de los puntos tangentes es diferente al caso anterior. En primer lugar, se posicionará un punto tangente en cada vértice (por lo que todo tramo tendrá al menos un punto tangente, independientemente de su longitud) y posteriormente se irán posicionando nuevos puntos tangentes en aquellos tramos cuya distancia entre dos puntos tangentes sea mayor, situando el nuevo en medio.

Para clarificar la idea, supongamos que inicialmente en una estructura triangular, imponemos 3 puntos tangentes, y poco a poco vamos añadiendo un mayor número de puntos:

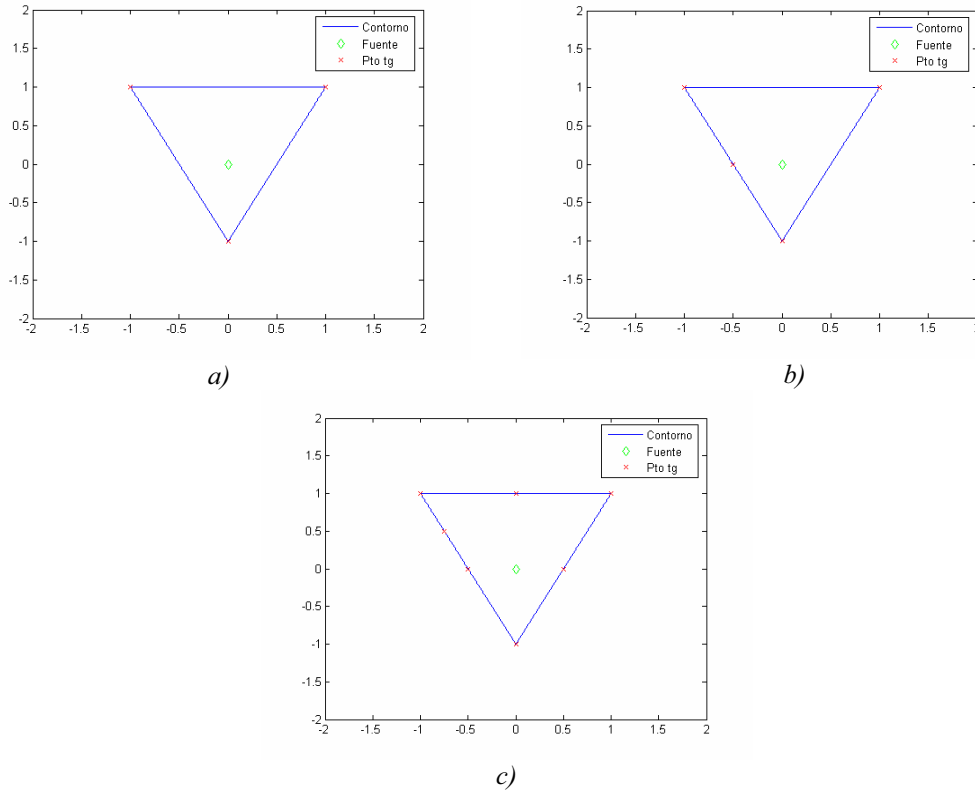


Figura 4.13 Ubicación de 3,4 y 7 puntos tangentes en una guía triangular, empleando una distribución de los mismos por vértices y mitades de segmentos.

Observamos la evolución en la inserción de puntos tangentes en la guía triangular. En a) los tres primeros puntos tangentes a colocar se ubican en los vértices de la guía, en b) el cuarto punto tangente se sitúa en un tramo medio y en c) la situación se repite con 7 puntos tangentes.

Aplicando este concepto a una guía ridge con los lados redondeados, con un total de 32 puntos tangentes, tendremos una ubicación de los mismos de:

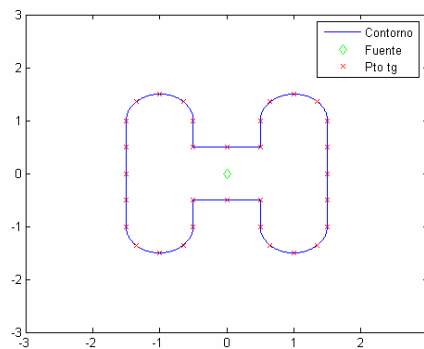


Figura 4.14 Ubicación de 32 puntos tangentes en una guía ridge redondeada, empleando una distribución de los mismos por vértices y mitades de segmentos.

Comprobamos como se ha situado un punto tangente en todos y cada uno de los vértices, situándose el resto de forma que cubre la estructura totalmente.

c) Distribución por distancia media del tramo a la carga fuente

En este caso la táctica a seguir será asignar a cada tramo un número de puntos tangentes y luego distribuirlos en él. La forma de realizar esta asignación tendrá dos componentes:

- Un número de puntos tangentes fijo (por ejemplo del 70%, aunque es modificable) que se va a distribuir de forma uniforme por la estructura, de forma que a todos los tramos le corresponda el mismo número de puntos tangentes.
- El resto, se asignará en función de la distancia media de cada tramo a la posición de la carga fuente, de forma inversamente proporcional. Así cuanto más cerca esté un tramo de la carga fuente, más puntos tangentes se le asignarán.

Un ejemplo de esta distribución se puede observar claramente en la estructura ridge con los lados redondeados:

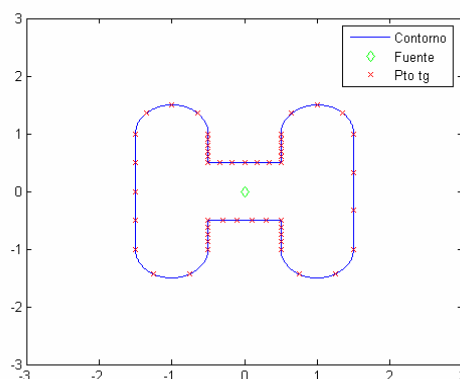


Figura 4.15 Ubicación de puntos tangentes en guía ridge redondeada en función de la distancia media de cada tramo a la fuente

d) Distribución por longitud uniforme saltando los vértices

Aunque en la implementación de los distintos casos la ubicación de puntos tangentes en los vértices de las estructuras no ha ocasionado ningún conflicto y ha proporcionado unos potenciales correctos, físicamente el potencial en un vértice no se encuentra definido. Ello es debido a que no es posible definir un vector normal a él, pues existen dos (uno perteneciente a cada tramo). La solución adoptada a este problema hasta la fecha había sido considerar uno de los dos vértices de cada tramo como un punto perteneciente al mismo, de tal forma que cada tramo presenta su vértice asociado y se rompe la posible indefinición.

No obstante se ha implementado este nuevo método, que ubica los puntos tangentes en tramos sin considerar los vértices y posteriormente distribuye estos puntos en cada tramo de forma equitativa, evitando el posicionamiento de los mismos en los vértices. De esta forma se evitan posibles conflictos a la hora de definir los potenciales.

En la figura 4.16 podemos observar una guía rectangular con 20 cargas/dipolos imagen, observando como los puntos tangentes se distribuyen alrededor de su contorno “saltando” los vértices.

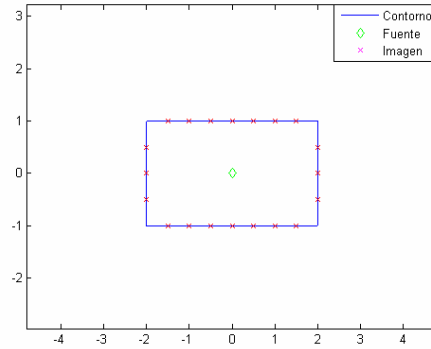


Figura 4.16 Ubicación de 20 puntos de forma uniforme y saltando los vértices, sobre una guía rectangular.

4.3.4 Ubicación de las imágenes

Una vez que tenemos totalmente definida la estructura y ubicados los puntos tangentes donde forzaremos que se cumplan las condiciones de contorno, el siguiente paso será situar de forma adecuada las cargas/dipolos imágenes alrededor. Impondremos el mismo número de cargas imágenes que puntos tangentes se hayan definido, tal y como lo requiere la formulación.

En este apartado mostraremos aquellos tipos de ubicación de imágenes estáticos, es decir, que no van a cambiar su posición en función del “coste” de los potenciales.

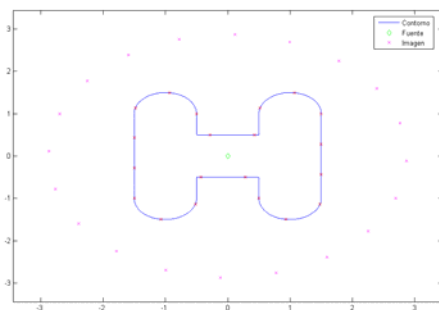
De entre las distintas posibilidades de situar las imágenes, se han implementando las siguientes:

a) *Situación circular*

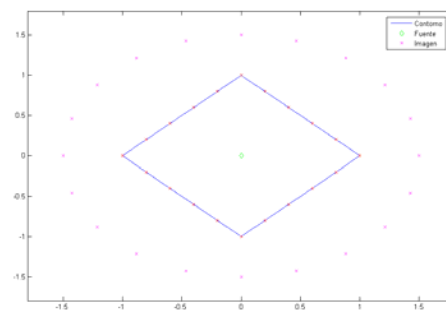
En este primer caso, vamos a situar las cargas imágenes de forma circular alrededor de la estructura arbitraria, de forma independiente a como se hayan situado los puntos tangentes en el contorno.

El radio del círculo sobre el que se sitúan las cargas imágenes se calcula a partir de la distancia máxima desde el centro hasta la estructura, multiplicándolo por un factor corrector.

Mostramos a continuación dos ejemplos con una guía ridge “redondeada” y una guía rombo:



Guía ridge redondeada



Guía Rombo

Figura 4.17 Ubicación de imágenes de forma circular alrededor de una guía ridge redondeada y una guía rombo.

b) Posicionamiento especular

En este caso, asignaremos a cada carga/dipolo imagen un punto tangente a la estructura de “referencia”, respecto al cual hallaremos su ubicación.

Concretamente, para una carga imagen dada hallaremos la ecuación de la recta que une la carga fuente (en el interior de la estructura) con el punto tangente en la estructura de “referencia” y hallaremos la distancia que los separa, que llamaremos ‘ d ’. Posteriormente, y siguiendo la recta calculada anteriormente, ubicaremos la nueva carga imagen a una distancia ‘ d ’ desde el punto tangente hacia el exterior de la estructura.

En función del tipo de estructura, puede que este posicionamiento no sea correcto pues algunas cargas imágenes caerían en su interior (o en el contorno); este es el caso de la guía ridge (en todas sus variantes) que no puede ser analizada mediante este método.

Algunos ejemplos de situación de las cargas imaginarias mediante este método serían:

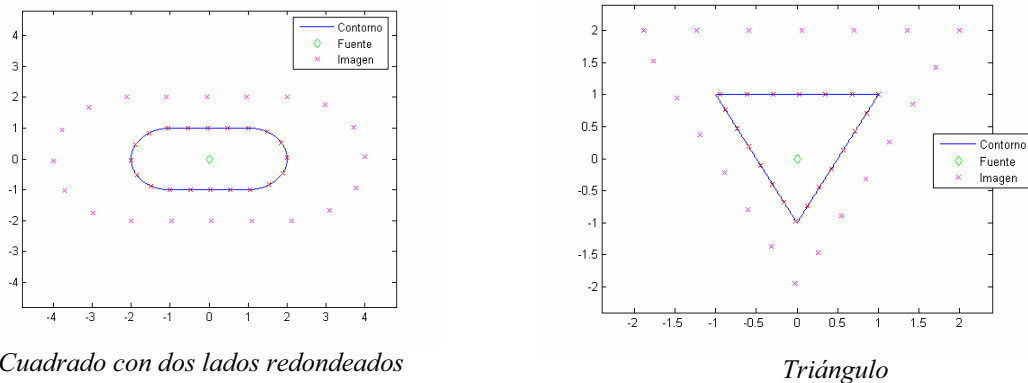


Figura 4.18 Ubicación de imágenes mediante posicionamiento especular. Ejemplos con una guía cuadrada de bordes redondeados y una guía triangular.

Observamos como en función de la distancia entre la carga fuente y cada uno de los puntos tangentes, se van situando las diferentes cargas imágenes.

c) Posicionamiento especular con variación para tramos curvos

Esta tipo de posicionamiento es una variación del anterior, que se comporta exactamente igual para el caso de los tramos rectos. La modificación se introduce para el caso de los tramos curvos, donde en vez de usar la anterior forma de colocación, emplearemos un plano tangente auxiliar al punto tangente en el tramo curvo, ubicando la carga imagen de forma simétrica respecto a este plano, tal como observamos en la figura 4.19.

Observamos como para cada punto tangente sobre el que imponer las condiciones de contorno en un tramo curvo, situamos un plano tangente auxiliar respecto al cual hallaremos de forma simétrica la posición de la imagen.

Al igual que ocurría con el método anterior, es posible que para algunos tipos de estructura no se pueda realizar este tipo de ubicación de las cargas imágenes, pues algunas de ellas pueden caer en el interior o el contorno de la estructura.

En el caso de que se pueda aplicar, este método suele proporcionar mejores resultados que el anterior cuando existen tramos curvos.

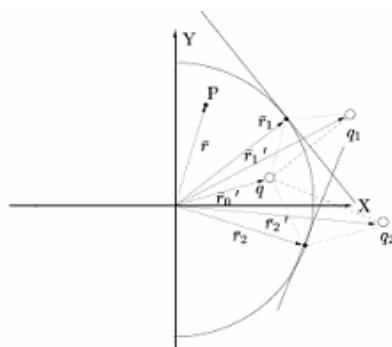


Figura 4.19 Ubicación de imágenes en tramos curvos

Un ejemplo sería la guía cuadrada con dos lados redondeados, donde observamos claramente la combinación de las dos técnicas de ubicación de imágenes.

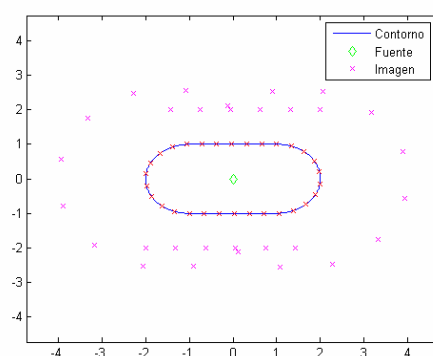


Figura 4.20 Combinación de técnicas de ubicación de imágenes: especular y recta tangente auxiliar para tramos curvos. Ejemplo sobre guía cuadrada con 2 lados redondeados.

d) Situación de las imágenes siguiendo el contorno de la estructura

En este último tipo de posicionamiento de las imágenes, situaremos a las mismas a una distancia de la estructura en cuestión, siguiendo su contorno. Intuitivamente es un método muy sencillo, que presenta una mayor complejidad en su implementación por la arbitrariedad de las estructuras.

En la figura 4.21 podemos comprobar el funcionamiento de este método, para dos estructuras relativamente complejas: guía ridge y guía estrella.

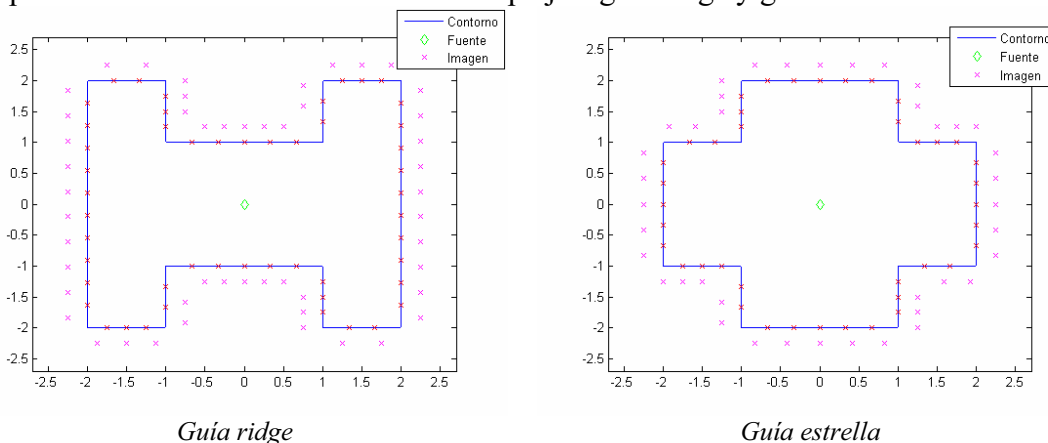


Figura 4.21 Ubicación de imágenes siguiendo el contorno de las guías “ridge” y “estrella”

4.3.5 Reconocimiento de estructuras arbitrarias

Uno de los problemas que se nos plantea a la hora de trabajar con geometrías arbitrarias es saber si un punto cualquiera se encuentra en el interior o en el exterior de la estructura, para poder así determinar si procede calcular el potencial en ese punto o no.

Es por tanto necesario definirse una estrategia que nos permita conocer con exactitud la ubicación de cada punto del espacio respecto a nuestra estructura.

Para ello, hemos implementado el siguiente algoritmo:

- 1) Reconocer los límites de la estructura arbitraria e introducirla en un rectángulo determinado, un poco mayor que la geometría.
- 2) Dado un punto arbitrario del espacio, obtener la mínima distancia desde el punto a ese rectángulo a través de los ejes 'x' e 'y'. Así, nos moveremos en línea recta hasta el punto de más cercano del rectángulo.
- 3) Consideraremos todos los *tramos rectos* en los que al menos uno de sus vértices se encuentre en la dirección y sentido que une nuestro punto arbitrario con el rectángulo, estando los de la dirección contraria uno por arriba y otro por abajo:

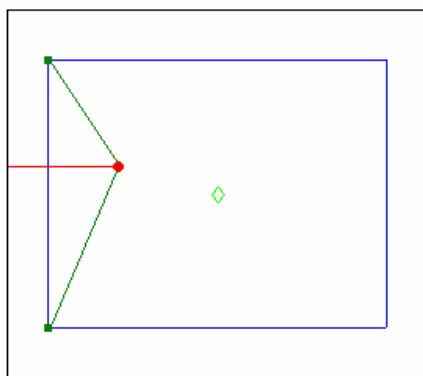


Figura 4.22 Reconocimiento de tramos rectos situados entre un punto cualquiera y el exterior de la estructura. Ejemplo con una guía cuadrada.

En la figura 4.22 suponemos que tenemos un punto arbitrario en el interior de la guía cuadrada (punto rojo) y hallamos una dirección y sentido para llegar al rectángulo que envuelve nuestra estructura arbitraria (línea roja). Además, únicamente el tramo izquierdo tiene al menos un vértice por delante de nosotros (en la dirección y sentido calculadas) y uno de los vértices por arriba y el otro por abajo en la otra componente (en este caso el eje 'y').

- 4) En el caso de *tramos oblicuos*, usaremos la recta que une el punto de partida con el cuadrado que engloba la estructura, buscando intersecciones con las ecuaciones de las rectas de tramos oblicuos.

Podemos observar dos ejemplos en la figura 4.23. En el caso del tramo oblicuo de la izquierda, observamos como la recta que une el exterior de la guía con el punto en cuestión no intersecciona ningún tramo, a diferencia del tramo oblicuo de la derecha, donde si se produce esta intersección.

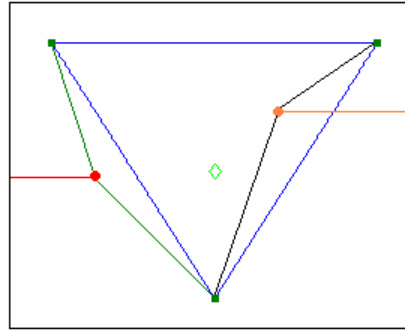


Figura 4.23 Reconocimiento de tramos oblicuos situados entre un punto cualquiera y el exterior de la estructura. Ejemplo con una guía triangular.

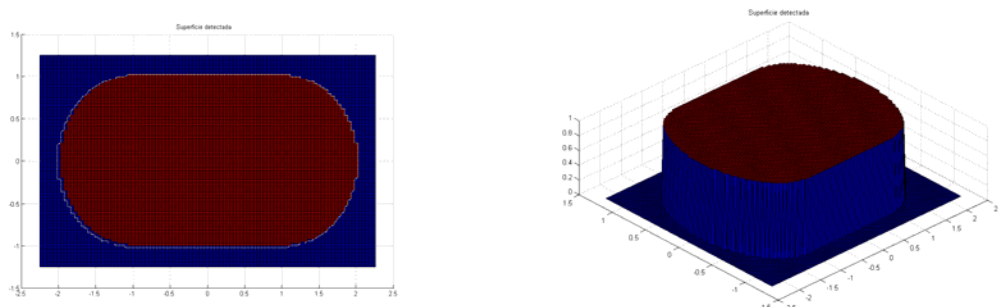
5) Otro asunto algo más complejo es cuando nos encontramos ante *tramos curvos*. En este caso, hallaremos en primer lugar la distancia desde nuestro punto arbitrario hasta el centro que define el tramo curvo. Si esta distancia es mayor que el radio, comprobaremos si en nuestra dirección y sentido de movimiento vamos a tener delante al menos uno de los vértices del tramo curvo. En caso afirmativo de alguna de las dos condiciones anteriores, pasaremos a estudiar más en detalle el caso:

- En primer lugar, comprobaremos si tenemos por delante los dos vértices del tramo curvo, en cuyo caso es seguro que lo deberemos de atravesar.
- En caso contrario, discerniremos si estamos en el interior del tramo curvo o no en función de los ángulos. Para ello, hallaremos el ángulo desde el centro del tramo curvo a cada uno de los vértices, y desde nuestro punto arbitrario al centro del cilindro, comprobando posteriormente si el ángulo respecto al punto arbitrario se encuentra comprendido entre los ángulos de los vértices.

6) Finalmente, contaremos el número de tramos atravesados por la estructura; si este número es impar, el punto arbitrario inicial se encontraba en el interior; al ser par ó nulo el punto arbitrario inicial estaba fuera de la estructura arbitraria.

De esta forma, podemos analizar cualquier punto del espacio pudiendo distinguir si pertenece o no al interior de cualquier estructura arbitraria, por compleja que sea. Esto es muy importante a la hora de realizar el cálculo del potencial escalar en el interior de nuestra estructura, pues ya tenemos definido completamente cual será ese interior.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de cómo el software programado es capaz de determinar si un punto del espacio está en el interior de la estructura o no:



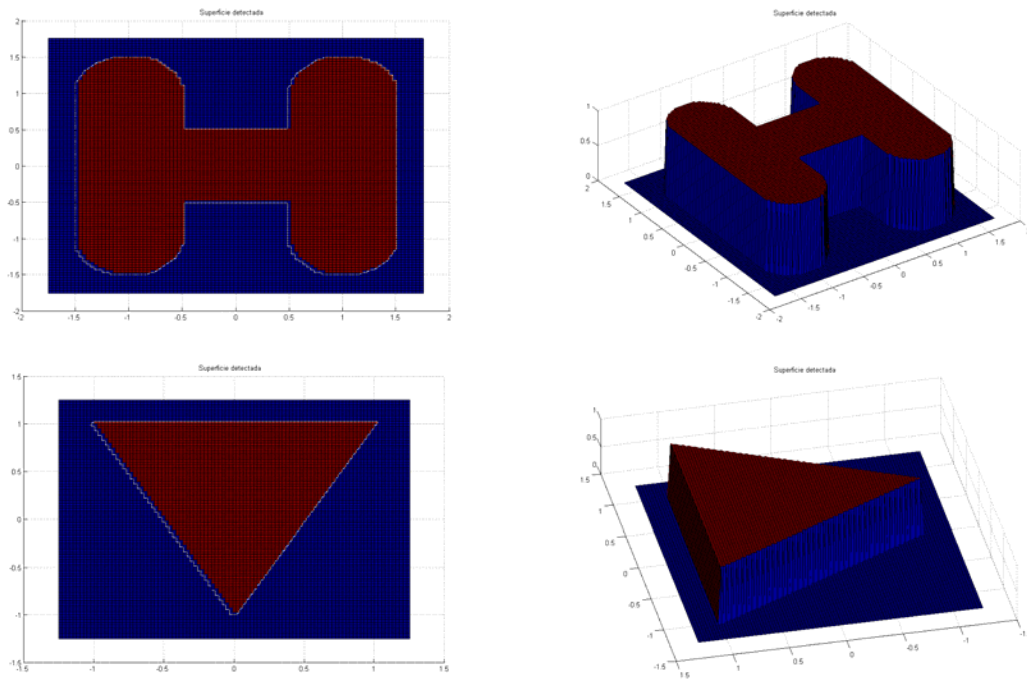


Figura 4.24 Ejemplo de reconocimiento del interior de estructuras arbitrarias. Visualización en 3D.

4.3.6 Ejemplos de potenciales en estructuras arbitrarias

En este punto ya tenemos todo lo necesario para calcular el potencial escalar y vector en el interior de casi cualquier estructura. Este apartado, mostraremos varios resultados de potenciales para varias guías.

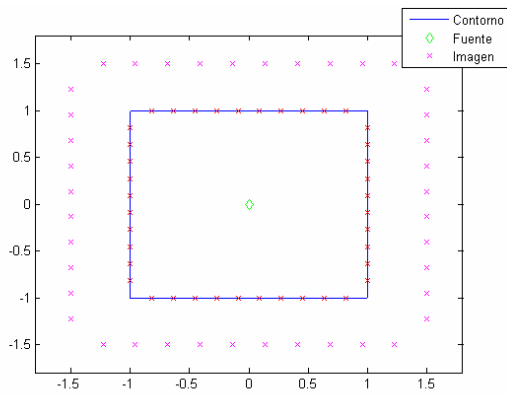
Emplearemos de forma general una ubicación de puntos tangentes a las estructuras uniforme, “saltando” los vértices para evitar posibles indefiniciones. En cuanto a la colocación de imágenes, usaremos varias técnicas en función de la guía analizada. En el apartado siguiente, mostraremos como obtener un “coste” de la implementación del potencial escalar y vector en las guías, lo que nos puede dar una medida de la corrección del mismo así como la posibilidad de elegir aquel método de entre todos los propuestos que nos proporcione un menor error.

Es de resaltar que aunque por motivos de espacio sólo vamos a presentar resultados de los potenciales de algunas estructuras, cualquier otra puede ser rápidamente analizada sin más que definirla por sus vértices, como vimos anteriormente.

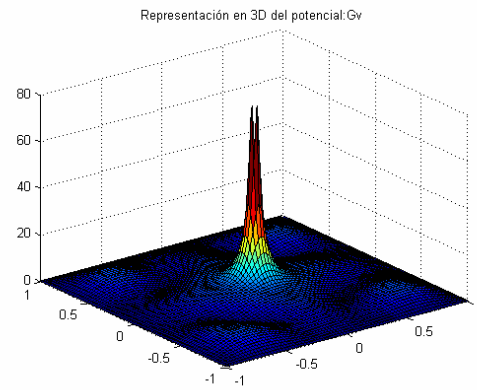
La frecuencia de funcionamiento será de 300Mhz (en el capítulo siguiente veremos el comportamiento en frecuencias de las guías, pues en este punto nuestro objetivo es mostrar la capacidad de cálculo de estos potenciales), estando las medidas en metros (o directamente λ). Las guías analizadas son:

1) Cuadrada

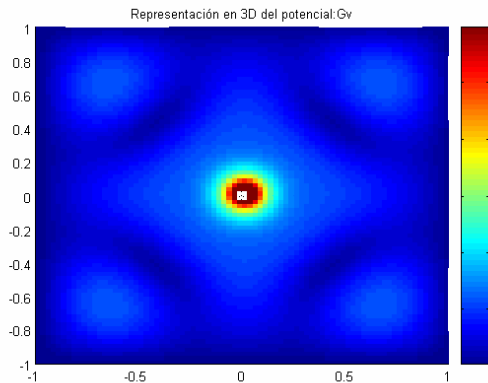
En este caso, emplearemos un total de 40 imágenes distribuidas alrededor de la estructura, a una distancia de 0.5λ de la misma. Los potenciales obtenidos fueron los siguientes:



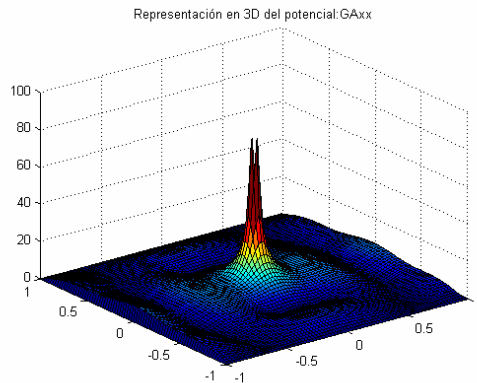
Situación a analizar



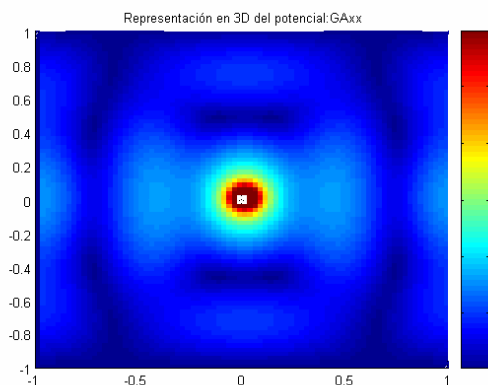
Potencial escalar



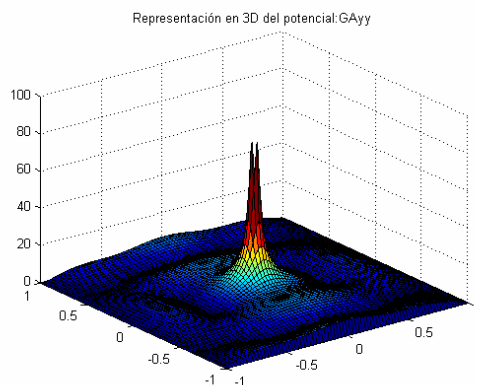
Potencial escalar



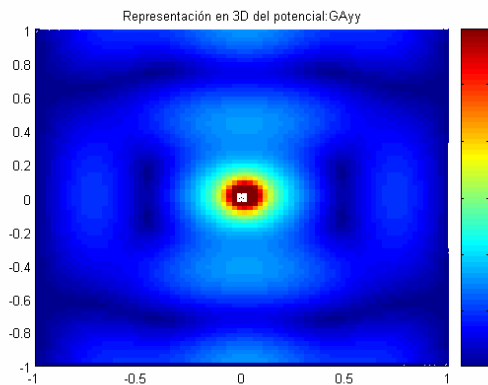
Potencial vector G_{Axx}



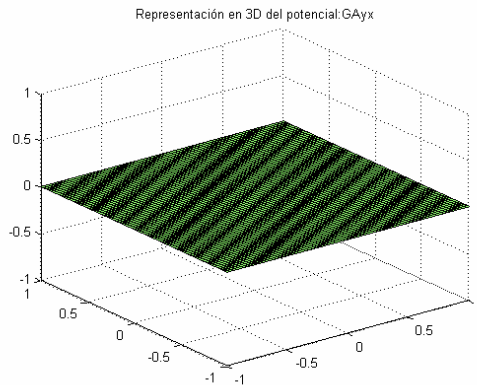
Potencial vector G_{Axx}



Potencial vector G_{Ayy}



Potencial vector G_{Ayy}

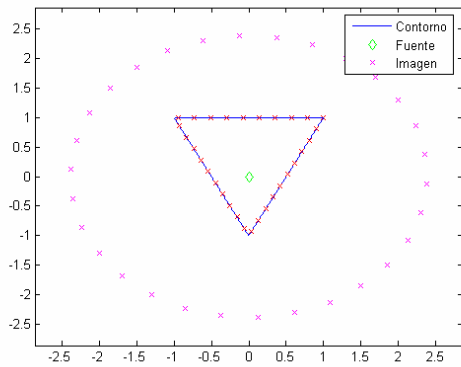


Potencial vector cruzado

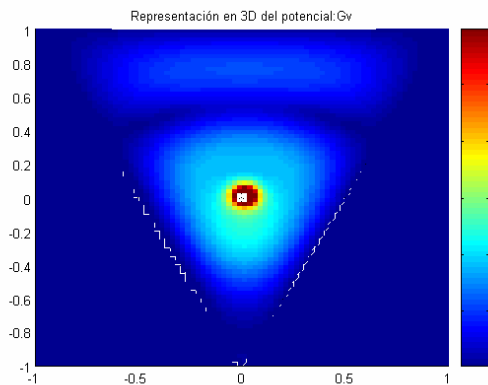
Figura 4.25 Potenciales para una guía cuadrada de 2x2m. 300Mhz. 40 imágenes.

2) *Triangular*

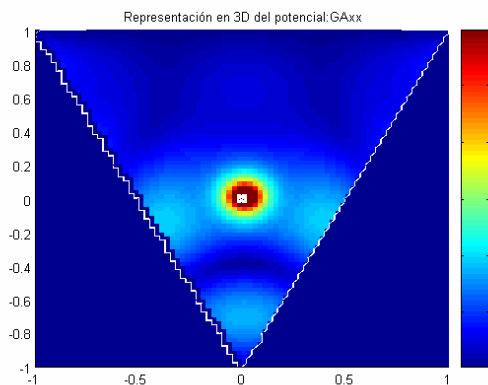
En este caso, emplearemos un total de 30 imágenes distribuidas de forma circular alrededor de la estructura. Se han distribuido los puntos tangentes en la guía triangular de forma uniforme, sin “saltar” los vértices. Los potenciales obtenidos fueron los siguientes:



Situación a analizar

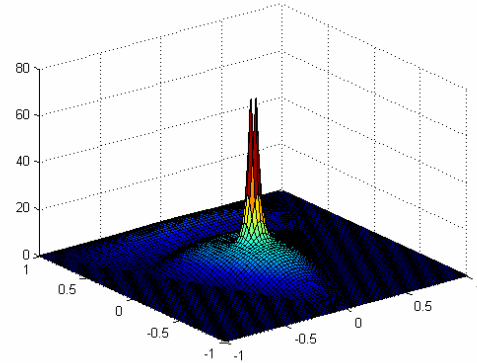


Potencial escalar



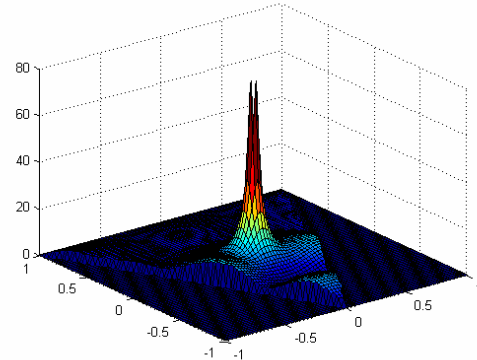
Potencial vector G_{xx}

Representación en 3D del potencial: G_v



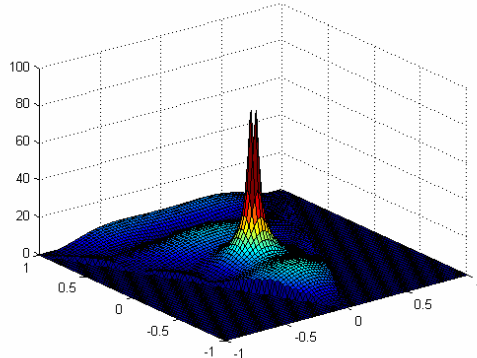
Potencial escalar

Representación en 3D del potencial: G_{vxx}

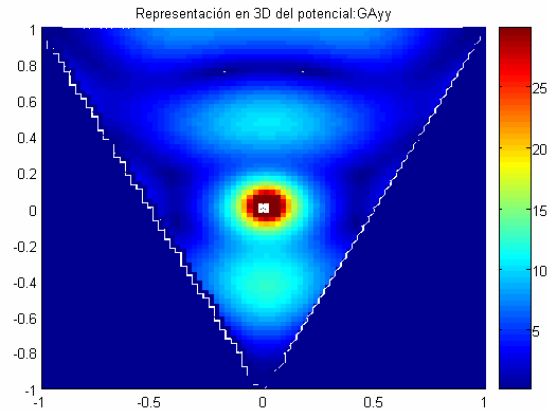


Potencial vector G_{xx}

Representación en 3D del potencial: G_{vyy}



Potencial vector G_{yy}



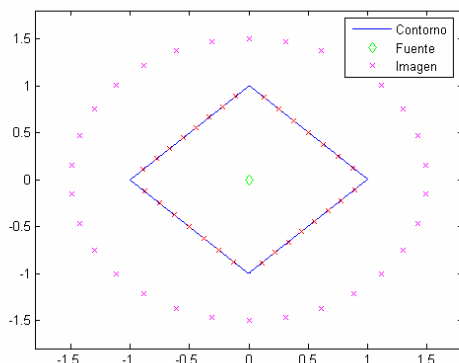
Potencial vector G_{Ayy}

Figura 4.26 Potenciales para una guía triangular. 300Mhz. 30 imágenes.

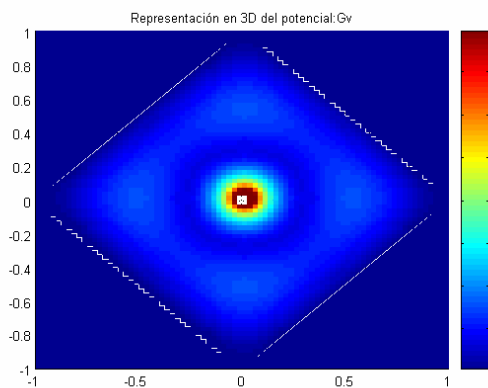
3) Rombo

En este caso, emplearemos un total de 30 imágenes distribuidas de forma circular alrededor de la estructura. Al igual que ocurría con el caso de la guía triangular, las componentes cruzadas no se anulan, debido a la presencia de los planos oblicuos.

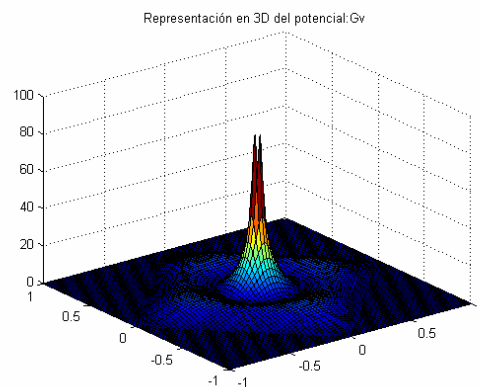
Los potenciales obtenidos fueron los siguientes:



Situación a analizar

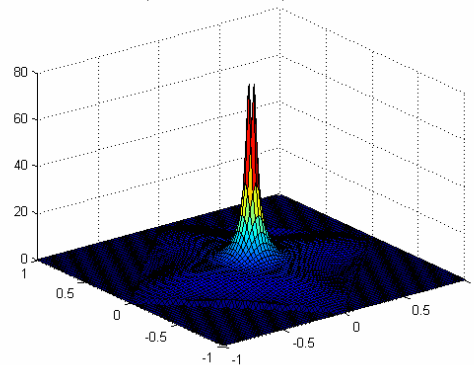


Potencial escalar



Potencial escalar

Representación en 3D del potencial: G_{Axx}



Potencial vector G_{Axx}

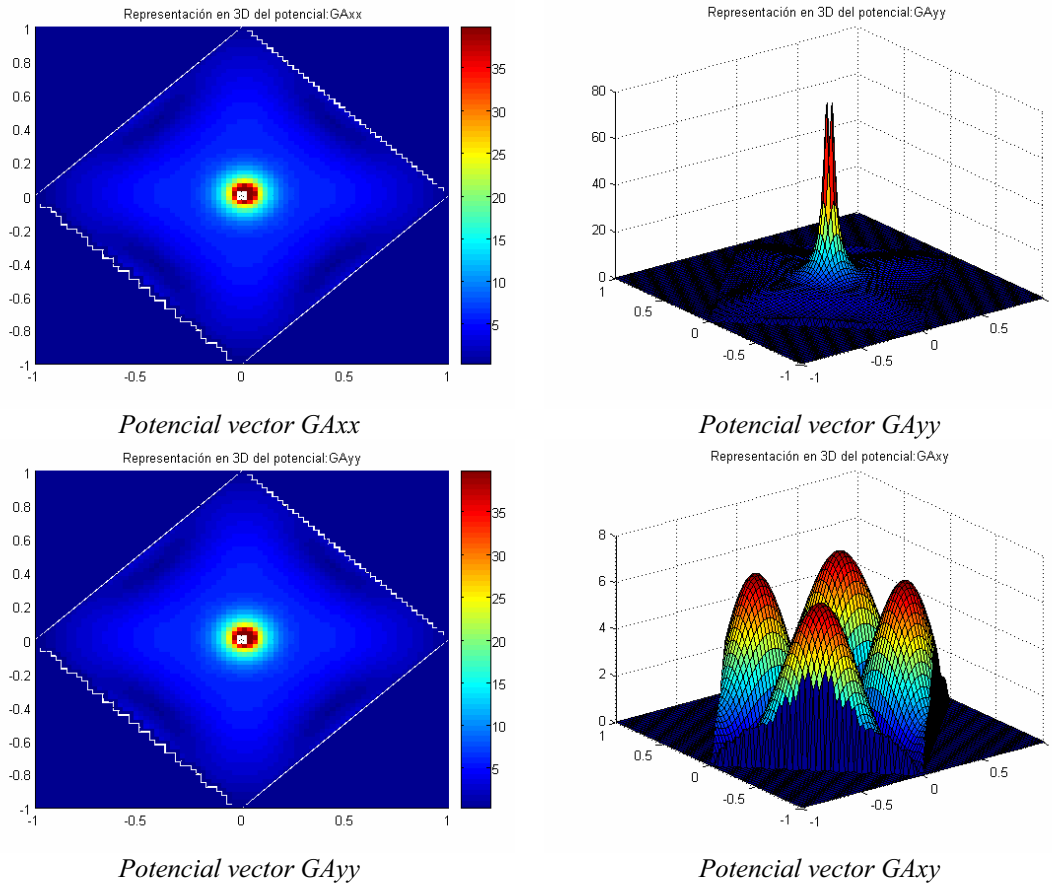
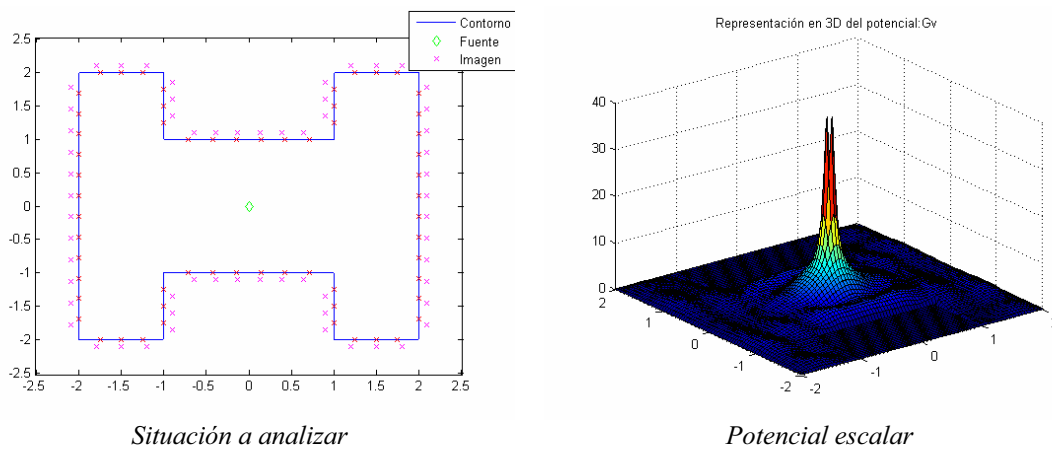


Figura 4.27 Potenciales para una guía rombo. 300Mhz. 30 imágenes.

4) Ridge

Para analizar la guía tipo ridge, al ser algo más compleja, emplearemos un total de 60 imágenes distribuidas de forma que sigan el contorno de la guía, relativamente cerca de la misma. Al no existir tramos oblicuos ni curvos, las componentes del potencial vector cruzadas son nulas.

Los potenciales obtenidos fueron los siguientes:



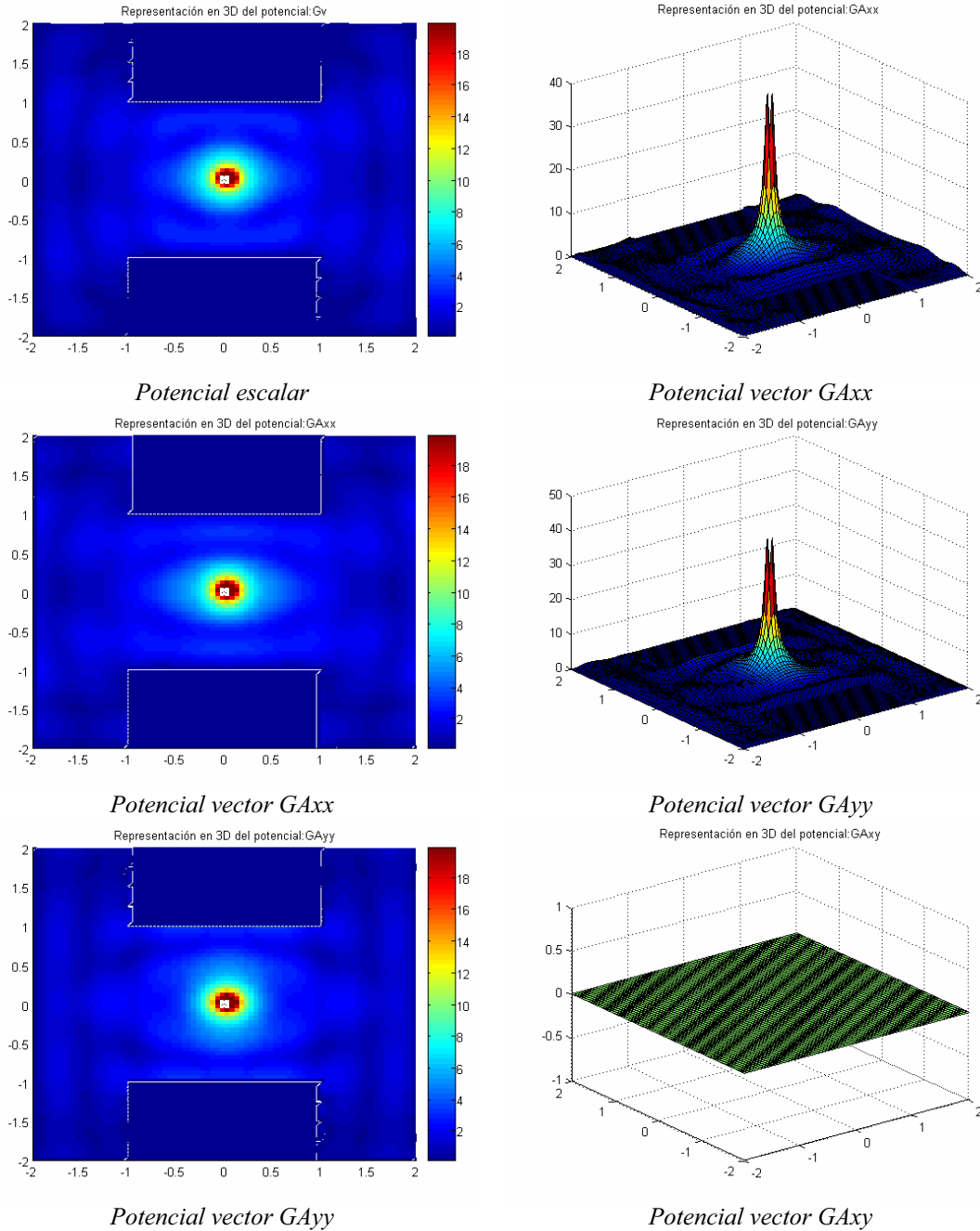


Figura 4.28 Potenciales para una guía ridge. 300Mhz. 60 imágenes.

5) Estrella

Para analizar la guía estrella empleamos un total de 64 imágenes, distribuidas de forma uniforme a lo largo de su estructura (teniendo cada tramo de igual longitud el mismo número de puntos tangentes e imágenes). Esta guía no presenta componentes del potencial vector cruzado.

Los potenciales obtenidos fueron los siguientes:

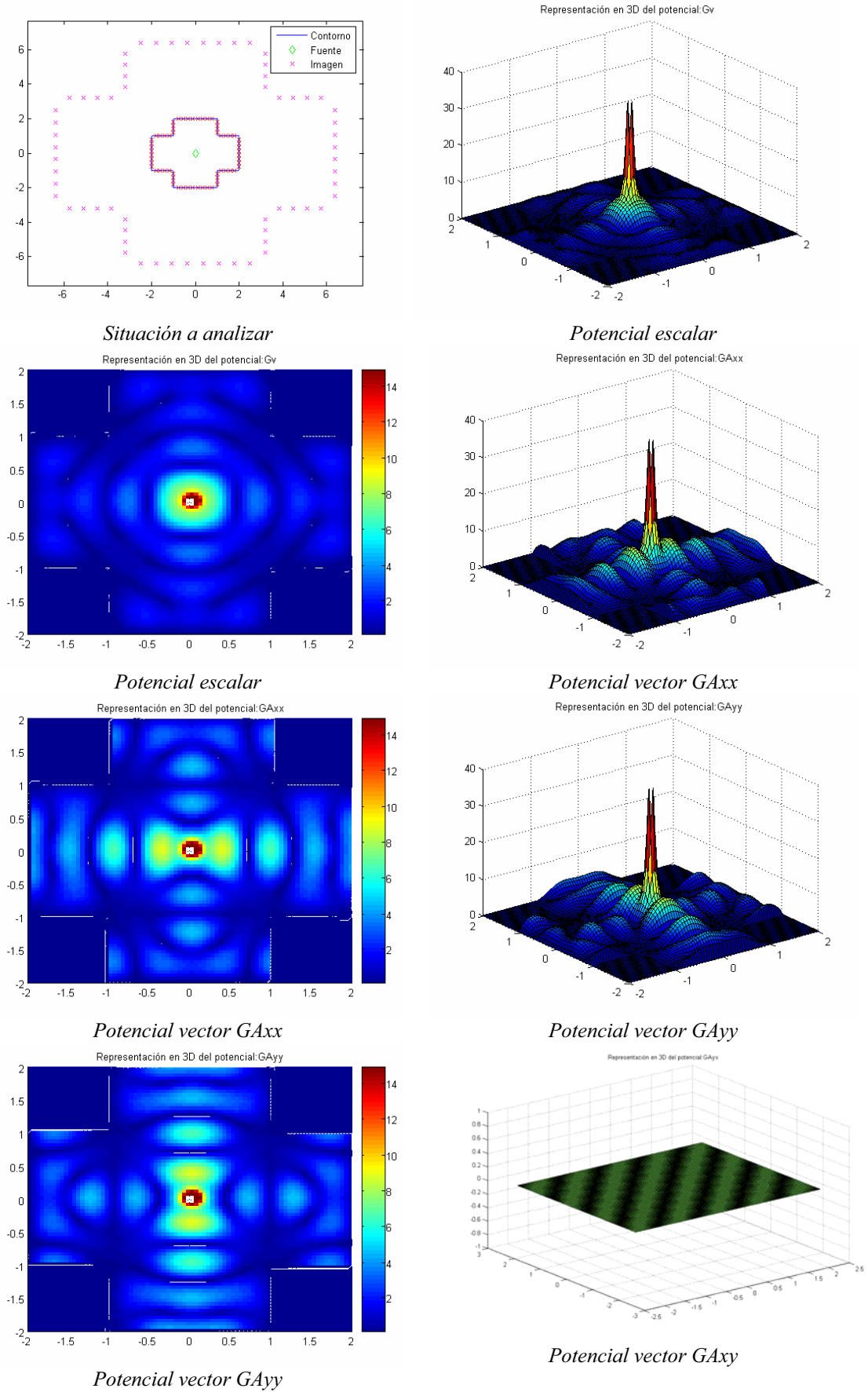


Figura 4.29 Potenciales para una guía estrella. 64 imágenes.

Para concluir este apartado debemos de indicar que los potenciales en el interior de cada guía dependen de una forma muy significativa de cómo se ubiquen los puntos tangentes en el contorno de la misma así como de la situación de las imágenes. Pequeñas variaciones de estos elementos sobre algunos tipos de guías puede dar lugar a resultados distintos. Es por esto que se necesita una medida para evaluar la corrección de estos potenciales: el “coste” o error que cometemos al calcularlos. Gracias a este “coste” podremos saber cuando los potenciales obtenidos son correctos y con qué margen de error lo son. Además, nos permitirá analizar los puntos en los que se cometen los errores en las implementaciones con el fin de poder atacarlos directamente para reducirlos.

4.4 Optimización de los potenciales en estructuras arbitrarias

4.4.1 Introducción

En este apartado vamos a introducir un “coste” en el cálculo de los potenciales tanto escalar como vector. Esta medida, similar en concepto a la presentada en el capítulo 3, nos va a permitir conocer el grado de precisión en el cálculo de los potenciales. Por ejemplo, en las representaciones de los potenciales del apartado anterior no conocemos que error se ha introducido y hasta que punto obtenemos unos resultados válidos; sin embargo si sobre cada estructura sobre la que implementamos los potenciales hallamos el grado de cumplimiento de las condiciones de contorno podemos saber si esa representación es válida.

Además, sobre cada tramo de cualquier estructura, el software es capaz de mostrar este “coste” o hasta que punto se cumplen las condiciones de contorno: podemos así identificar “picos” de error, ver la variación del mismo ó comprobar porqué en el análisis de una estructura no obtenemos los resultados deseados.

Otra aplicación será emplear este coste para realizar una optimización del posicionamiento de las imágenes alrededor de la estructura a analizar: situando las mismas de forma circular y variando su radio (misma técnica que presentamos en el capítulo 3) ó optimizando la distancia a la que situar las imágenes de forma especular desde la fuente. Con ambos métodos, trataremos de conseguir unas representaciones óptimas.

Finalmente indicar que así comprobamos como hay ciertas estructuras que presentan una convergencia muy rápida con un número reducido de imágenes (por ejemplo la guía cuadrada, rectangular, rombo, circular, etc) presentando por tanto un “coste” en la implementación de los potenciales muy pequeño. Otras estructuras necesitan un número de imágenes mayor, una ubicación de las mismas de una determinada manera, etc. obteniendo costes mayores (como por ejemplo la guía ridge, guía estrella, guía dual, etc). Conocer la distribución del error es fundamental para tratar de idear métodos que consigan contener al mismo.

4.4.2 Coste del potencial escalar

La definición del “coste” del potencial escalar es idéntica a la proporcionada en el capítulo 3, pues ahí ya se realizó con vistas a su extensión a estructuras arbitrarias. Tras resolver el sistema de ecuaciones con el que obtenemos el valor complejo de las

‘N’ cargas que rodean a la estructura, recompondremos el potencial en el interior de la misma mediante:

$$G_{V_{cy}}(\vec{r}) = G_V(\vec{r}, \vec{r}_o') + \sum_{k=1}^N q_k \cdot G_V(\vec{r}, \vec{r}_k') \quad (4.32)$$

Si recorremos el contorno de la estructura en cuestión, podemos observar si se cumplen o no las condiciones de contorno, obteniendo su “coste” asociado:

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} |G_{V_{cy}}| dc \quad (4.33)$$

Comprobamos cómo para el potencial escalar la condición a cumplir es evaluar su valor en el contorno de la estructura.

En este punto, vamos a analizar cualquier geometría, descomponerla en sus tramos constituyentes (rectos ó curvos) y ver la distribución del potencial escalar en los mismos. Integrando el valor absoluto de este potencial obtendremos la medida del coste.

Supongamos por ejemplo la guía cuadrada de la figura 4.25. En primer lugar, numeraremos sus tramos para poder identificarlos y posteriormente mostraremos la distribución del potencial escalar en su contorno:

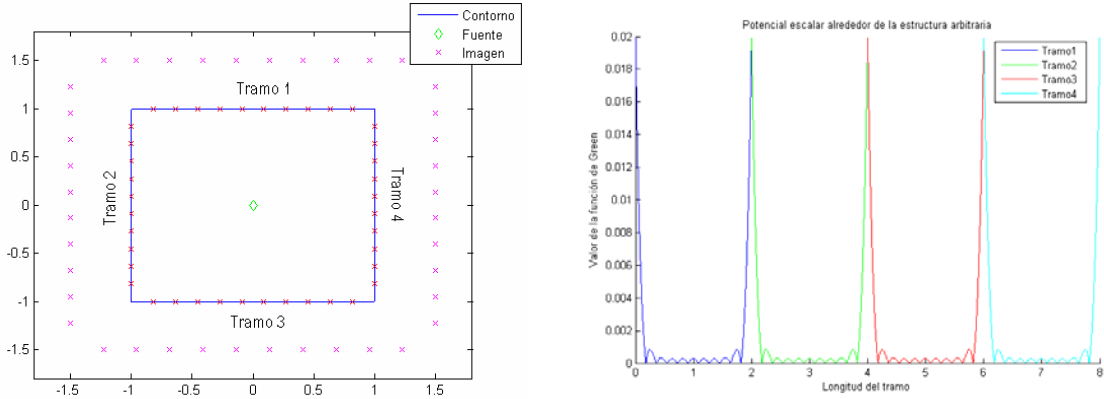


Figura 4.30 Representación del potencial escalar en el contorno de una guía cuadrada. 40 imágenes, fuente en el centro de la guía.

Podemos observar la numeración llevada a cabo en la guía cuadrada. Empezando por el tramo superior (derecho si hubiere), en sentido contrario a las agujas del reloj (siguiendo por tanto el orden con el que fue definida la guía cuadrada en su fichero de configuración). Esta es la forma en la que serán numerados todos los tramos de cualquier guía definida.

En segundo lugar, comprobamos la distribución del potencial escalar en el contorno de la guía cuadrada. Podemos observar cada tramo de un color diferente y numerado. A diferencia de en la guía circular, donde representábamos el ángulo, en este caso representamos el potencial sobre la longitud de cada tramo (poniendo cada tramo a continuación del otro).

Observamos como han aparecido un total de 40 nulos (provocados por las condiciones de contorno impuestas), y como los valores del potencial entre ellos aumentan, de forma especial en las esquinas.

Si realizamos el cálculo del coste para esta estructura y con esa configuración, obtenemos un total de:

$$Coste = 1.1935 \cdot 10^{-2}$$

Observamos que se trata de un valor muy reducido, lo que implica que el potencial escalar calculado es correcto. Modificaciones en la ubicación de cargas y puntos tangentes a la estructura pueden disminuir este coste, pero en este caso no es necesario al tener esta representación una precisión muy alta.

Otro ejemplo sobre una guía más compleja puede ser la guía tipo “ridge”. Si empleamos un total de 60 imágenes distribuidas siguiendo el contorno de la guía a una distancia de 0.25λ (una distribución diferente a la empleada en la visualización de los potenciales en el apartado anterior), el potencial escalar en el contorno de la estructura será:

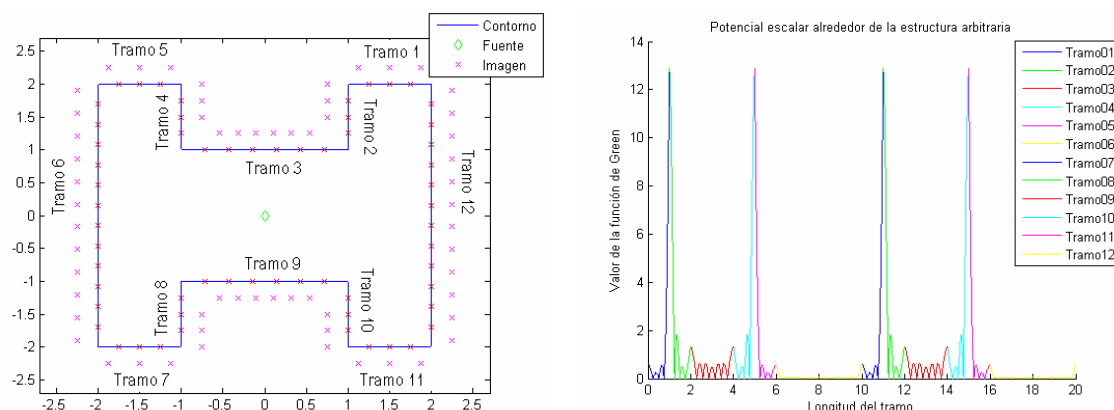


Figura 4.31 Representación del potencial escalar en el contorno de una guía ridge. 60 imágenes, fuente en el centro de la guía.

En primer lugar, observamos como la numeración de los tramos se realiza tal y como se explicó anteriormente: empezando desde el tramo superior derecho y en el sentido contrario a las agujas del reloj. Esta regla se mantendrá para cualquier estructura analizada.

En segundo lugar, vemos la distribución por tramos del potencial escalar en la guía ridge. Comprobamos como la mayoría de los tramos presenta un valor reducido, cumpliendo de forma adecuada las condiciones de contorno, excepto en cuatro esquinas donde el valor del “error” se dispara. Estas esquinas son las cuatro esquinas superiores que dan a la abertura interior. Si visualizamos el potencial escalar en el interior de la guía ridge, podemos comprobar como en esas zonas aparecen unos “picos” que no representan el potencial y son productos una mala implementación:

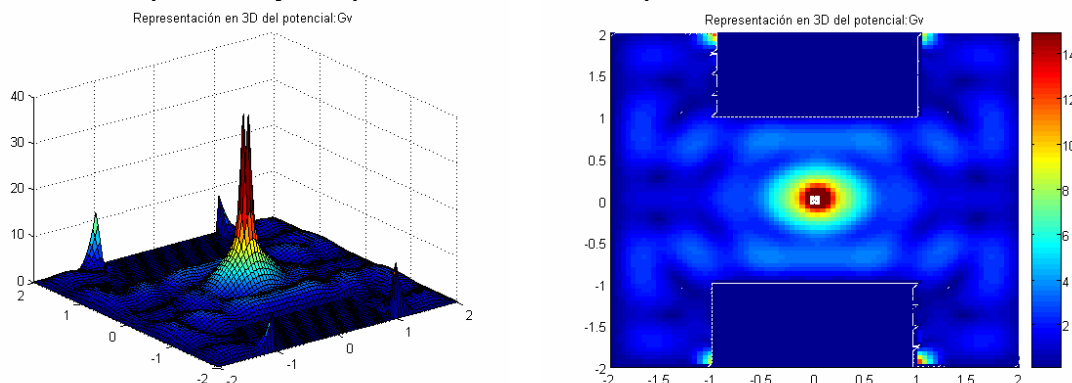


Figura 4.32 Representación del potencial escalar en el interior de una guía ridge. 60 imágenes situadas a 0.25λ siguiendo el contorno de la guía.

El coste total de la implementación del potencial escalar para esta guía ridge es de: $Coste = 17.2302$, mientras que el coste de la implementación mostrada en el apartado anterior fue de 7.58 (un coste mucho más reducido provocado por una separación diferente de las imágenes a la estructura).

Comprobamos como para el caso actual el coste es elevado estando propiciado casi exclusivamente por lo picos de las cuatro esquinas superiores interiores. No obstante el error es muy localizado, siendo el potencial en el interior de la guía correcto.

De esta forma observamos como el “Coste” es una medida adecuada para comprobar la corrección de los potenciales en el interior de guías de geometría arbitraria. Además, la distribución del “Coste” a lo largo de los tramos nos permite identificar cuales son las zonas donde el error el mayor.

4.4.3 Coste del potencial vector

Aunque conceptualmente la definición del “coste” del potencial vector es igual a la presentada en el capítulo 3, matemáticamente presenta pequeñas diferencias, pues se ha cambiado la formulación que permitía el cálculo del potencial vector. Es por ello que se va a dar en este punto una nueva definición del Coste para el potencial vector, acorde con la nueva formulación para tramos rectos presentada en este capítulo.

Tal y como pasaba en la formulación circular, la mayor complejidad del potencial vector hace que su análisis no sea tan directo como en el caso del potencial escalar.

Recordando el sistema de ecuaciones que nos proporcionaba los valores complejos de los dipolos imagen (tanto en dirección ‘x’ como en dirección ‘y’) al imponer ‘N’ condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 & -\sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^x + \cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \cdot I_k^y = \sin(\varphi) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0) \\
 & \cos(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x \cdot I_k^x + \sin(\varphi) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y \cdot I_k^y = -\cos(\varphi) \cdot C_{i,0}^y \\
 & i = 1, 2, 3 \dots N
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Donde los valores de las constantes son:

$$\begin{aligned}
 C_{i,k}^x &= \cos(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} \\
 C_{i,k}^y &= \sin(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} + \cos(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Supondremos que el dipolo fuente está orientado en la dirección ‘x’ (siendo el desarrollo análogo si estuviera orientado en la dirección ‘y’).

Evaluaremos el grado de cumplimiento de la ecuación 4.34 no únicamente en los N puntos discretos donde se impone (y donde debe de ser 0), sino en todo el contorno de la estructura. Así, tras resolver la ecuación 4.34 recompondremos los potenciales en el interior de cualquier estructura mediante la ecuación 4.31.

En el caso del potencial vector, sus valores no son nulos en el contorno de la estructura (a diferencia del potencial escalar). Lo que si que debe de ser nulo es la evaluación en un punto cualquiera ‘i’ del contorno de la expresión 4.34, es decir:

$$\begin{aligned}
 & -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^x - \sin(\varphi_i) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_0') + \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^y = 0 \\
 & \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x I_k^x - \cos(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x + \sin(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y I_k^y = 0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Por tanto, deberemos de integrar la contribución de cada una de las condiciones a lo largo de todo el contorno de la estructura:

$$F_1 = \int_{\text{Contorno}} \left| -\sin(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_c, \vec{r}_k') \cdot I_k^x - \sin(\varphi_c) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_c, \vec{r}_0') + \cos(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_c, \vec{r}_k') \cdot I_k^y \right| dc \tag{4.37}$$

$$F_2 = \int_{\text{Contorno}} \left| \cos(\varphi_c) \cdot \sum_{k=1}^N C_{c,k}^x I_k^x - \cos(\varphi_c) \cdot C_{1,0}^x + \sin(\varphi_c) \sum_{k=1}^N C_{c,k}^y I_k^y \right| dc = 0 \tag{4.38}$$

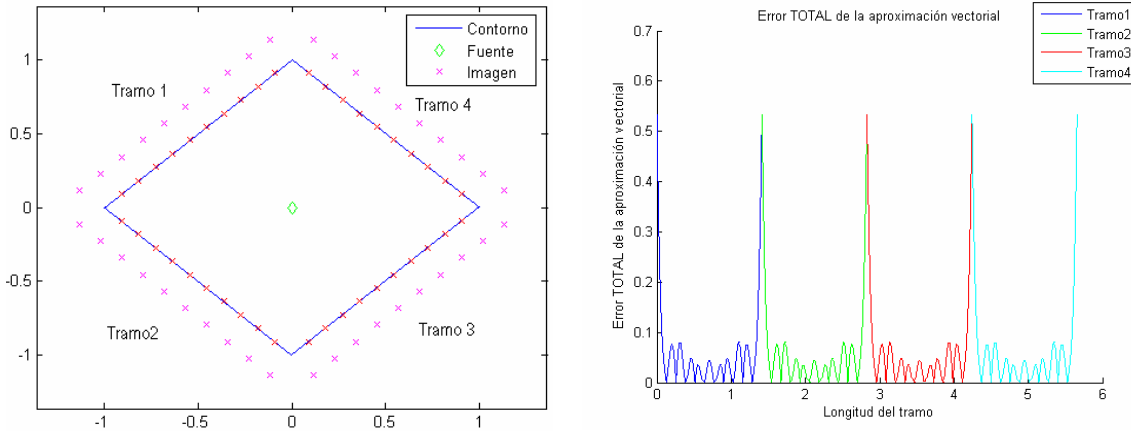
Así, cuanto más reducido sea el valor de las ecuaciones 4.37 y 4.38 más fiel será la representación del potencial vector en el interior de la estructura. Finalmente, sumaremos ambas condiciones con el fin de obtener un coste total representativo del potencial vector:

$$C_{oste} = F_1 + F_2 \tag{4.39}$$

A pesar de que las ecuaciones son muy similares a las presentadas en el capítulo 3 para las guías circulares, existe una diferencia fundamental: la evaluación de las constantes definidas en la ecuación 4.35.

Tras definir el coste del potencial vector, ya podemos aplicarlo a las distintas estructuras obteniendo así una medida del grado de corrección de los potenciales. Al igual que en el caso del potencial escalar, presentamos la distribución de este coste para cada uno de los tramos que constituyan la geometría analizada, distinguiendo además entre las dos condiciones (4.37 y 4.38) y el coste final (4.39).

Por ejemplo, analizaremos una guía rombo con 40 imágenes, obteniendo un coste del potencial vector total de:



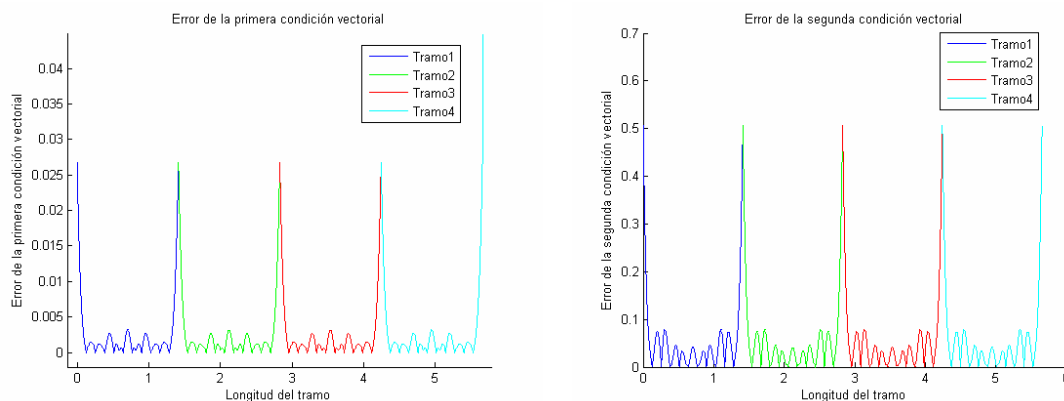


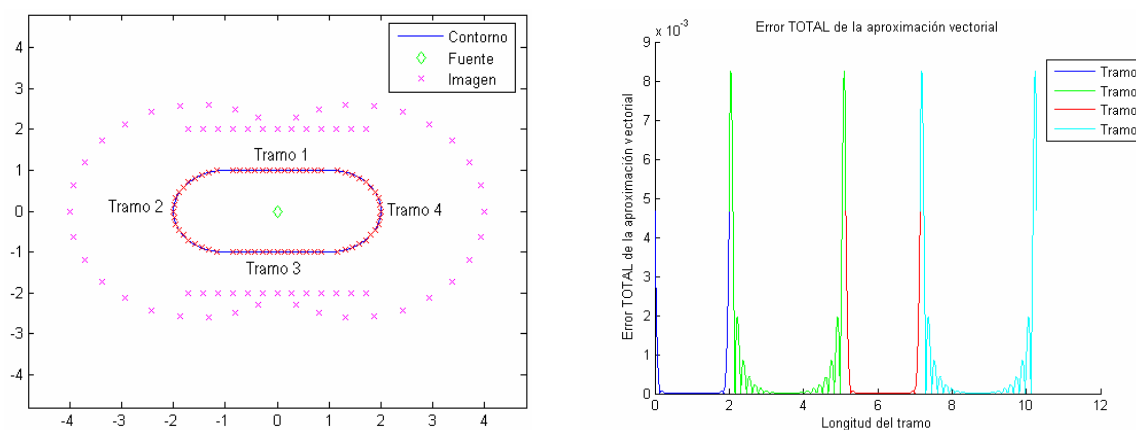
Figura 4.33 Representación del Coste del potencial vector en una guía rombo, con 40 imágenes. 300 Mhz, fuente situada en el centro de la guía.

Observamos en primer lugar la numeración de los tramos del rombo, comenzando desde el vértice superior. Analizando la primera condición vectorial, observamos como cumple los nulos impuestos por las 40 imágenes, apareciendo un pico en las esquinas. Un comportamiento muy parecido aparece en la representación de la segunda condición vectorial, aunque ésta presenta unos valores más elevados.

En conjunto, obtenemos una distribución del error simétrica, con unos errores reducidos y un aumento importante de éstos en los picos.

El coste total obtenido ha sido de: 0.3221, un valor muy reducido para los niveles de error del potencial vector. Al igual que ocurre con el potencial escalar, una variación de la distribución de imágenes o puntos tangentes modificará este coste.

Otro ejemplo sobre una guía más compleja puede ser la guía cuadrada pero con dos lados “redondeados”. Si empleamos un total de 64 imágenes distribuidas siguiendo el método especular y rectan tangentes para los tramos curvos, el potencial vector en el contorno de la estructura será:



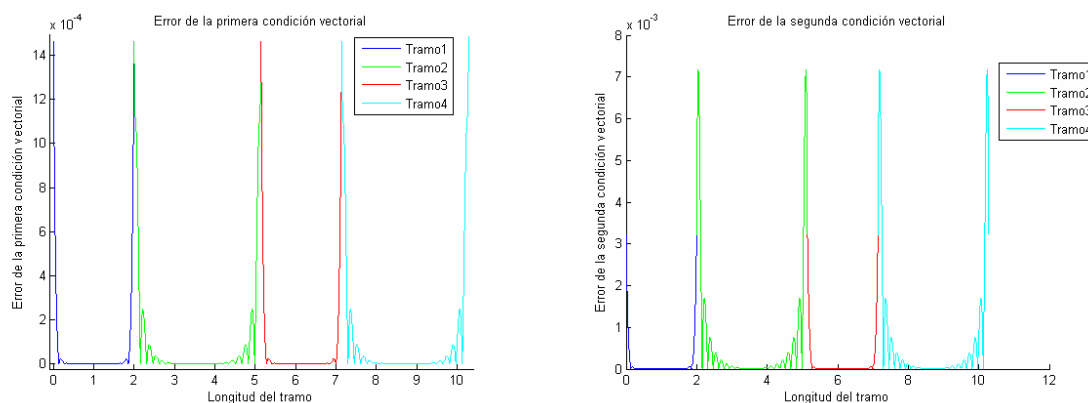


Figura 4.34 Representación del Coste del potencial vector en una guía cuadrada con dos lados redondeados, con 64 imágenes. 300 Mhz, fuente situada en el centro de la guía.

En primer lugar, observamos la situación poco usual de las imágenes al combinar técnicas de ubicación de tramos rectos con técnicas de tramos curvos. La numeración de los tramos es la realizada hasta la fecha.

En segundo lugar, podemos comprobar como el Coste total presenta picos en las transiciones de tramos curvos a tramos rectos, obteniendo los tramos curvos un error más considerable. Analizando detenidamente los resultados también observamos como aparecen los 64 nulos impuestos, por lo que el sistema de ecuaciones planteado funciona de forma adecuada.

El coste obtenido ha sido de $5.6456 \cdot 10^{-3}$, un coste muy bajo, por lo que los resultados obtenidos los podemos considerar como válidos.

4.4.4 Optimización de potenciales

Una vez definidos el ‘Coste’ del potencial escalar y vector, vamos a utilizarlo con el fin de optimizar las posiciones de las cargas imágenes al analizar cualquier tipo de estructura, obteniendo así una representación de los potenciales mucho más precisa.

Los métodos que vamos a presentar en este apartado son una transposición directa de los métodos estudiados en el capítulo 3, pero generalizados para estructuras arbitrarias. Conforme vayamos presentado cada método, trataremos de estudiar distintas estructuras, obteniendo así sus costes y tratándolos de optimizar.

Mostraremos de forma conjunta la optimización de los potenciales escalar y vector cuando sea posible, mientras que otros tipos de optimizaciones (como las de descenso de gradiente) únicamente son aplicables al potencial escalar.

4.4.4.1 Método de la variación del radio

Los fundamentos de este método ya fueron presentados en el capítulo 3, y básicamente consistía en envolver la estructura a analizar con un círculo de cargas/dipolos imagen. La optimización del radio de este círculo mediante la evaluación del coste (tanto del potencial escalar como vector) permite encontrar un radio que minimice el error cometido en la representación de los potenciales. El valor de este radio será diferente en función de que potencial estemos optimizando. Además, realizaremos un doble barrido para encontrar el radio óptimo: un primer barrido con paso “grueso” para ubicar la zona en la que se encuentra el mínimo del coste (tanto para el potencial escalar como vector) y un segundo barrido de paso “fino” con el que

finalmente obtendremos este mínimo. En función de la estructura a analizar y del número de imágenes empleadas, el coste computacional crecerá, siendo relativamente importante su cálculo en el caso del potencial vector.

Esta técnica era la que mejores resultados proporcionaba en guía circulares (ya que las imágenes se distribuían de la misma forma); no obstante para estructuras arbitrarias no proporciona unos resultados tan satisfactorios, pues no es capaz de adaptarse a las peculiaridades de cada estructura.

Vamos a mostrar un ejemplo de este método aplicándolo sobre una guía triangular, empleando para ello 30 imágenes.

En primer lugar, obtendremos los potenciales para el caso de situar las imágenes de forma circular, pero sin realizar la optimización. Esta situación fue la analizada anteriormente, en el punto 4.3.6.2. De este modo en la figura 4.26 podemos observar los potenciales calculados. El coste de esta implementación fue relativamente reducido, con unos valores de 0.2176 para el potencial escalar y de 1.7925 para el potencial vector. La distribución de estos errores en el contorno es:

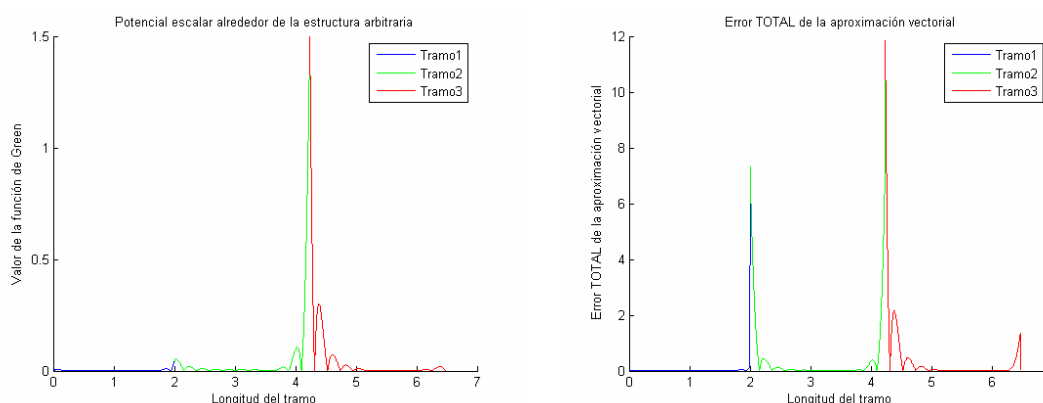


Figura 4.35 Coste de los potenciales escalar y vector en una guía triangular, 30 imágenes ubicadas de forma circular sin optimizar su radio. Fuente en el origen de coordenadas.

Comprobamos como todo la mayor parte del error se encuentra en el vértice inferior de la guía triangular, tanto para el potencial escalar como para el potencial vector. Para este último caso además aparece una pequeña componente en el vértice superior izquierdo. La distribución del error no es simétrica en los dos vértices superiores debido a que la disposición de los puntos tangentes a la estructura no lo es, tal y como se mostró en la figura 4.26.

A continuación, realizaremos la optimización del radio para tratar de minimizar estos errores:

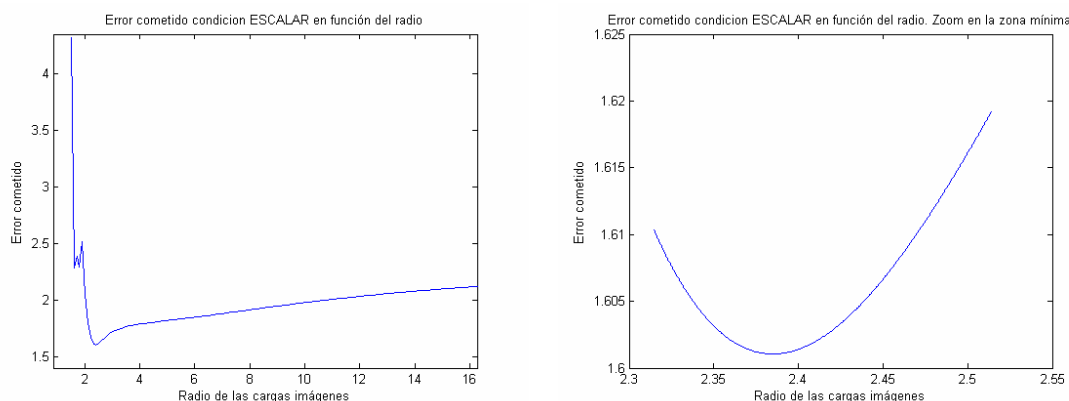


Figura 4.36 Evolución del coste en función del radio del círculo que ubica a las 30 imágenes. Guía triangular.

Comprobamos como el radio inicial que envolvía la estructura tenía valor muy cercano al óptimo, por lo que la mejoría de los potenciales no es muy notable: de un coste del potencial escalar de 0.2176 pasamos a uno de 0.2020, mientras que para el caso del potencial vector pasamos de un coste de 1.7925 a uno de 1.601. Esto sumado al coste computacional requerido para una mejoría tan poco significativa, hace desaconsejar este método en este caso.

No obstante su eficacia variará en función de la estructura que estemos analizando y de la ubicación de la fuente en el interior de la misma; no obteniendo unos resultados satisfactorios en la mayoría de las ocasiones.

4.4.4.2 Método de la variación de la distancia especular.

En este tipo de posicionamiento, variaremos la distancia de situación de las imágenes dentro de la línea que une la fuente (situada en el interior de la estructura) con su punto tangente (sobre el que se imponen las condiciones de contorno) asociado.

De esta forma, conseguimos una distribución de las imágenes que sigue la estructura analiza, creciendo o disminuyendo en tamaño hasta que conseguir un coste óptimo. Este método es válido tanto para optimizar el potencial escalar como el potencial vector, y un emplea una táctica de doble barrido igual a la comentada para el método de radio variable.

Un ejemplo de la ubicación de imágenes mediante este método es el siguiente:

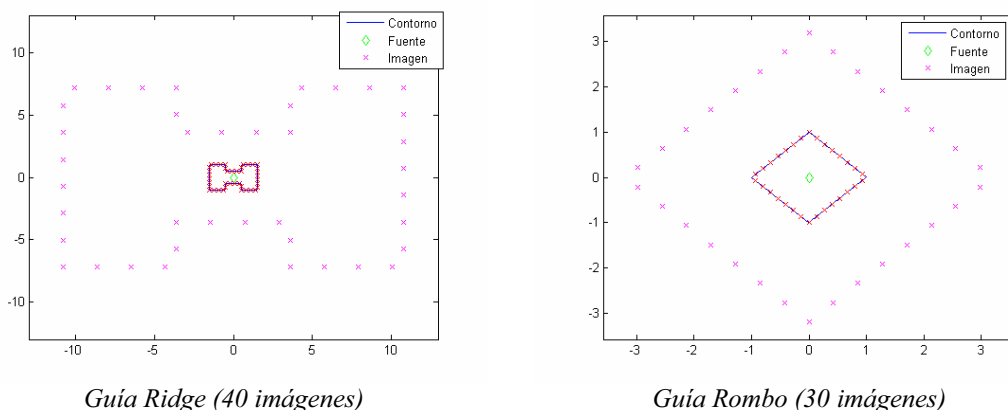


Figura 4.37 Ejemplos de ubicación de cargas mediante el método de la variación de la distancia especular. Casos de guía ridge (40 imágenes) y guía rombo (30 imágenes)

Los resultados obtenidos con este método son muy satisfactorios (ya que las imágenes se adaptan a la forma de la geometría a estudiar), especialmente para aquellas estructuras que no presentan “entrantes”; en el caso de que los tuvieran, el método comienza a partir de aquel punto en el que todas las imágenes caen fuera de la estructura.

Como contrapartida, el coste computacional de este método es relativamente alto, debido a la gran cantidad de operaciones que hay que hacer para evaluar el coste en el contorno de una estructura arbitraria.

Vamos a mostrar un ejemplo de este método aplicándolo sobre una guía tipo estrella, empleando para ello 64 imágenes.

Para partir de un resultado general evaluaremos esta guía con esta misma táctica de ubicación de imágenes sin optimizar; de esta forma podremos apreciar las mejoras existentes en el caso de que se produzcan. El método general proporciona una ubicación de imágenes y un coste a la hora de implementar los potenciales de:

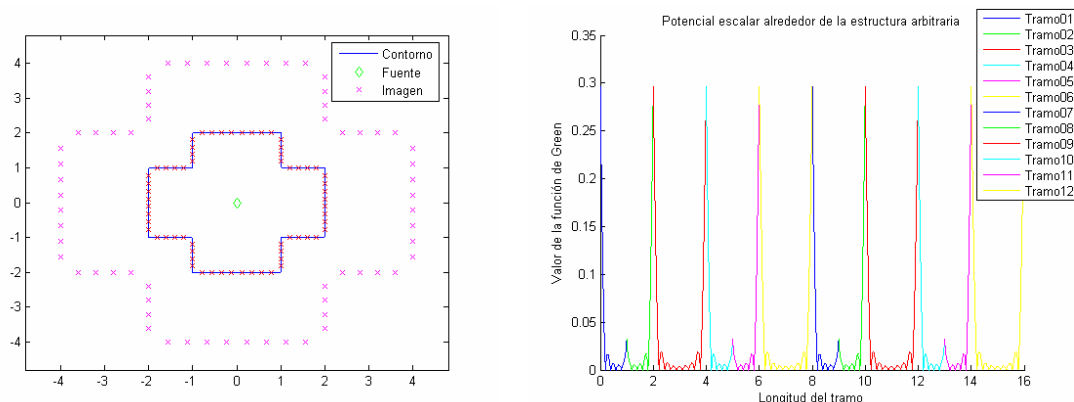


Figura 4.38 Ubicación de 64 imágenes en una guía “estrella” mediante un posicionamiento especular sin optimizar. Representación del coste escalar en su contorno.

Realizando el barrido en función de la distancia de colocación de imágenes, podemos obtener una variación del coste en función de esta distancia, para encontrar una distancia óptima en la que situar las imágenes. Concretamente, para esta configuración y la guía estrella hemos obtenido:

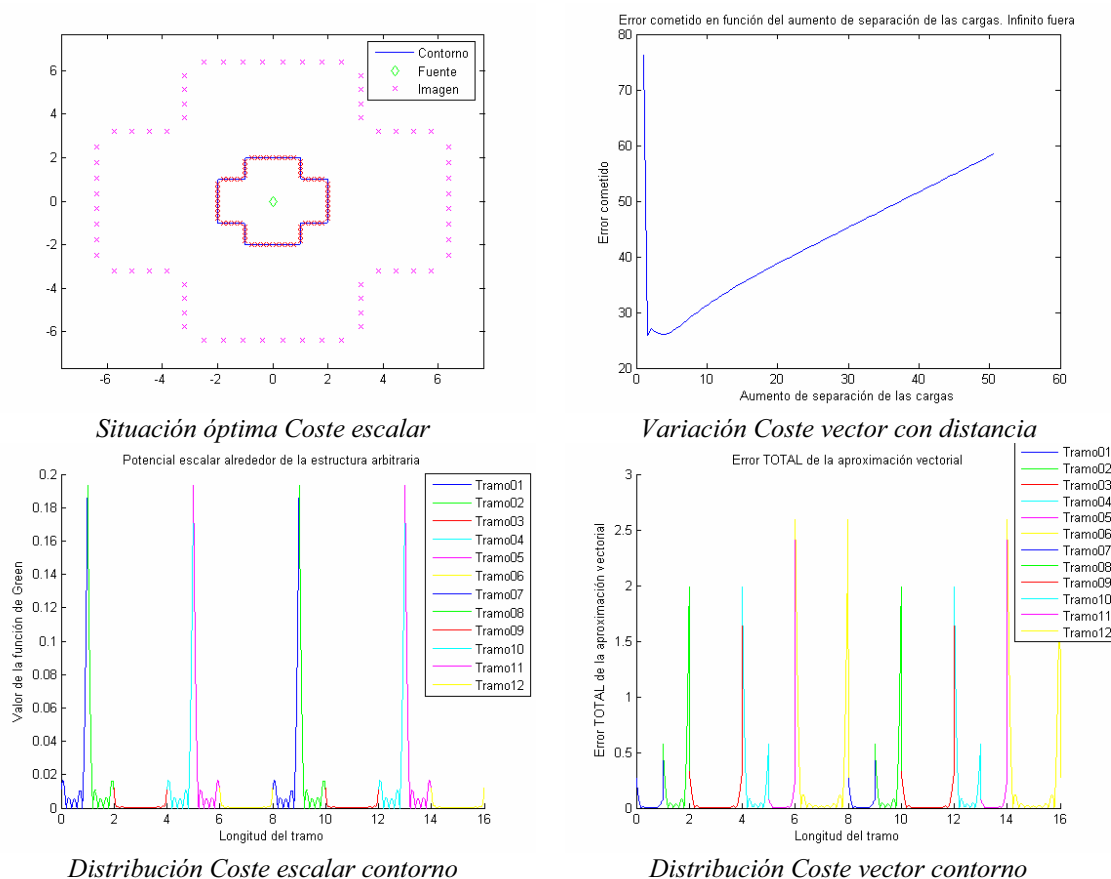


Figura 4.39 Situación final y representación de Costes en el contorno para potencia escalar y vector. Guía estrella, 64 imágenes.

Comprobamos como obtenemos unas distancias óptimas en el análisis de la guía que varían para el potencial escalar y vector, ya que deberemos de optimizar sus dos valores de forma independiente.

En cuanto al coste obtenido, comprobamos como el Coste escalar que hemos obtenido se ha reducido de los 0.4839 iniciales a un valor de 0.164769; por su parte el Coste vector ha pasado de 4.8916 a un valor de 2.0682. En ambos casos la reducción ha sido importante.

Finalmente, comprobamos la distribución del coste en el contorno se centra casi exclusivamente en las esquinas, tanto para el potencial escalar como para el potencial vector.

Cabe destacar que la optimización que se ha llevado a cabo ha sido muy compleja, pues era una estructura con 4 entrantes y 12 tramos. Para estructuras más simples, la reducción del coste que conseguimos con este método es muy importante y superior a la del resto de métodos.

4.4.4.3 Optimización por descenso de gradiente de las cargas

En este apartado vamos a aplicar la optimización por el método de descenso gradiente, con el fin de encontrar unos valores de las cargas complejas que describan al potencial escalar (pues este método todavía no se ha desarrollado para el potencial vector) de forma más precisa, minimizando el coste/error de su implementación.

El algoritmo de descenso de gradiente utilizado es el mismo que el presentado en el capítulo 3, pues éste ya se realizó para que pudiera ser extendido de manera natural a estructuras arbitrarias.

De forma general, un algoritmo de descenso de gradiente puede describirse como:

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k) \quad (4.40)$$

Donde $\bar{w}(k+1)$ representa un vector con los valores complejos de las cargas en la iteración $k+1$, $\bar{w}(k)$ representa el valor complejo de las cargas en la iteración actual, ‘ μ ’ es la constante de paso y $\nabla_{\bar{w}} C(k)$ es el gradiente del coste en la iteración k -ésima.

La situación inicial de los pesos no será aleatoria, sino que partirá de unos valores conocidos (y calculados mediante Point-Matching).

Es este punto deberemos de definirnos un coste sobre el que hallar el gradiente; nos quedaremos con la función de coste cuadrática conjugada, pues fue la que dio mejores resultados en la optimización de la formulación circular.

$$C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} |Gv_{cy}|^2 dc \quad (4.41)$$

A continuación deberemos de encontrar el gradiente del coste, con el fin de actualizar el valor complejo de las cargas. Este gradiente y su desarrollo coinciden exactamente con el expuesto en el capítulo 3 (ecuaciones 3.33 a 3.44) por lo que no lo volveremos a incluir aquí. Si mostraremos el resultado final del cálculo del gradiente del coste, con el que actualizaremos los valores complejos de las cargas imágenes:

$$\nabla_{q_p} C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} \left(Gv(\bar{r}, \bar{r}_o) \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* + \left[\sum_{k=1}^K q_k Gv(\bar{r}, \bar{r}_k) \right] \cdot Gv(\bar{r}, \bar{r}_p)^* \right) dc \quad (4.42)$$

De esta forma ya podremos emplear el algoritmo por descenso de gradiente, pues tenemos calculado el gradiente del coste.

En cuanto al coste computacional, su valor no es nada despreciable debido a la complejidad de las ecuaciones obtenidas; trataremos de reducirlo mediante técnicas como el ajuste dinámico del paso ' μ ' ó la detención del algoritmo con un criterio de convergencia. Ambas técnicas fueron explicadas con detalle en el capítulo 3, y consiguen reducir de forma más que significativa el coste computacional empleado.

La convergencia al utilizar este método dependerá de la situación de partida en la que nos encontremos, así como de la estructura que estemos analizando y de la posición relativa de la carga fuente en su interior. Al igual que ocurría para las guías circulares, el método se muestra más efectivo cuando tenemos un número de imágenes relativamente reducido (pues tiene más capacidad de disminuir el coste sin encontrar un mínimo local).

La cantidad de combinaciones que podemos realizar en este momento es enorme: una gran cantidad de estructuras arbitrarias a analizar, con distintas formas de ubicar los puntos tangentes en su contorno y las cargas imágenes a su alrededor. En todas estas combinaciones podemos aplicar un método de descenso de gradiente para optimizar esas cargas, disminuyendo de forma más o menos significativa el coste de la implementación del potencial vector.

Mostraremos a continuación como el algoritmo empleado funciona para algún caso concreto, como por ejemplo una guía rectangular. Para ello ubicaremos un total de 20 imágenes a su alrededor, siguiendo su estructura a una distancia de 0.5λ .

La situación de partida y el error cometido en la implementación del potencial vector es la siguiente:

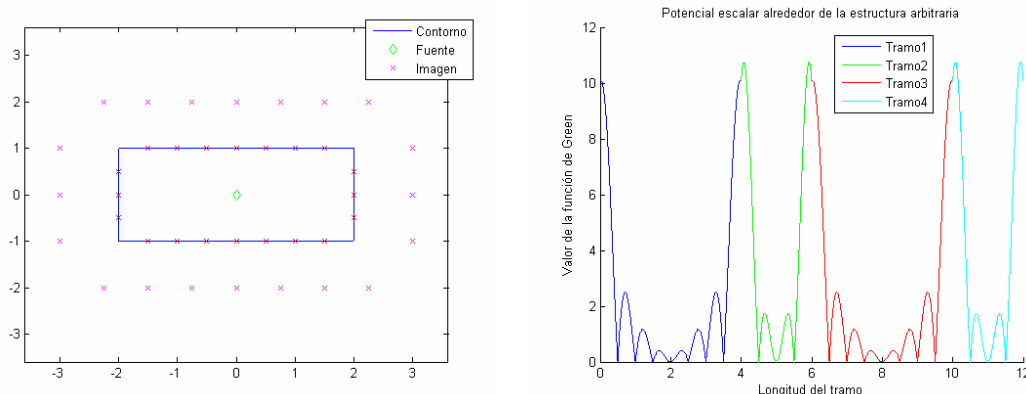


Figura 4.40 Situación de partida al analizar una guía rectangular, con 20 imágenes situadas a 0.5λ de la estructura. Representación del coste de los potenciales escalar en el contorno.

El error que obtenemos en la situación inicial es ciertamente elevado de 33.13 (que para el potencial escalar es un valor muy alto), presentando una componente mucho más elevada en las esquinas. No obstante hay que indicar que estamos analizando una estructura relativamente grande (en términos de λ) con un número muy reducido de cargas. Comprobamos como aparecen 20 nulos en la distribución del potencial escalar alrededor de la estructura, debido a la imposición de la condición de contorno en 20 puntos discretos.

Si realizaremos la optimización del valor complejo de las cargas, tendremos una evolución del coste en función del número de iteración y una distribución del coste escalar de:

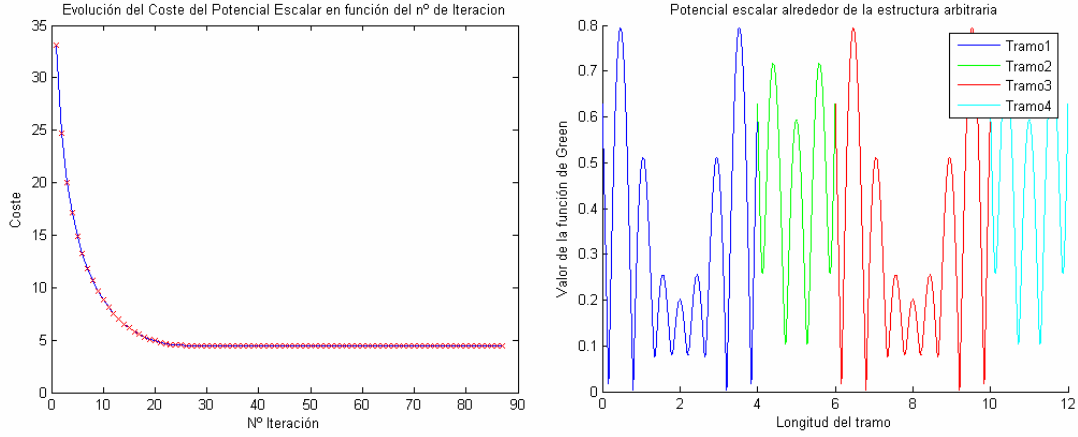


Figura 4.41 Evolución del coste del potencial escalar al evaluar una guía rectangular, 20 imágenes.

Comprobamos como el comportamiento del algoritmo de optimización es francamente bueno: reducidos de un coste inicial de 33.128 a uno de 4.4686, para una misma situación. El número de iteraciones ha sido relativamente alto, ya que el criterio de detención que se le ha impuesto exigía una convergencia casi total.

En cuando a la distribución del coste del potencial, observamos como ya no aparecen los 20 nulos en puntos discretos. Ello es debido a que al optimizar el valor complejo de las cargas se han dejado de imponer las condiciones de contorno en puntos concretos, en busca de un valor ponderado que proporcione el menor error posible.

Como principal inconveniente de este método, y de forma mucho más importante que el coste computacional, es su incapacidad de proporcionar unos resultados satisfactorios cuando el número de imágenes aumenta, estando limitado su uso a estructuras analizables con un máximo de 30 imágenes, ya que con un mayor número aunque el método funciona, cae demasiado rápido en un mínimo local siendo la mejoría proporcionada casi despreciable.

4.4.4.4 Optimización por descenso de gradiente de las posiciones

En este apartado vamos a aplicar la optimización por el método de descenso gradiente, con el fin de encontrar unas posiciones de las imágenes en el plano (x,y) que consigan minimizar el coste de la implementación del potencial escalar.

Al igual que con la optimización de cargas, el algoritmo de descenso de gradiente empleado ya fue usado en el capítulo 3, pues se realizó con vistas a ser extendido de forma natural a estructuras arbitrarias.

La actualización de las posiciones de cada imagen se realizará mediante la conocida fórmula del gradiente descendente:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \bar{x}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k) \\ \bar{y}(k+1) &= \bar{y}(k) - \mu \nabla_{\bar{w}} C(k)\end{aligned}\tag{4.43}$$

Donde $\bar{x}(k+1), \bar{y}(k+1)$ son dos vectores que representan las posiciones ‘x’ e ‘y’ de cada carga imagen que estamos calculando en la iteración actual, $\bar{x}(k), \bar{y}(k)$ representan las posiciones de las imágenes en la iteración anterior, ‘ μ ’ es la constante de paso y $\nabla_{\bar{w}} C(k)$ es el gradiente del coste en la iteración k-ésima.

De esta forma, partiendo de unas posiciones iniciales de las imágenes (por ejemplo cualquiera de las expuestas en este capítulo) alrededor de la estructura arbitraria

a analizar, el algoritmo irá evolucionando para encontrar aquellas posiciones de las imágenes que minimicen el coste del potencial escalar.

El coste que debemos de optimizar es el definido en la ecuación 4.41, es decir, en su forma cuadrática conjugada.

Para poder realizar el algoritmo, deberemos de calcular el gradiente de este coste respecto a los ejes 'x' e 'y'. Este desarrollo ya fue realizado en el capítulo 3 (ecuaciones de 3.55 a 3.64) y su resultado puede aplicarse a estructuras arbitrarias de forma directa.

El resultado de este gradiente, respecto a los ejes 'x' e 'y' es:

$$\nabla_p C_{oste} = \int_{\text{Contorno}} \left[q_p^* \cdot Gv(\vec{r}, \vec{r}_0') \cdot F^*(\vec{r}, \vec{r}_p') + q_p \cdot G_v^*(\vec{r}, \vec{r}_0') \cdot F(\vec{r}, \vec{r}_p') + \right. \\ \left. + q_p \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k^* Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right)^* \cdot F(\vec{r}, \vec{r}_p') + q_p^* \cdot \left(\sum_{k=1}^K q_k Gv(\vec{r}, \vec{r}_k) \right) \cdot F^*(\vec{r}, \vec{r}_p') \right] dc \quad (4.44)$$

Donde el valor de la constante 'F' dependerá de que estemos calculando en gradiente en un eje u otro:

$$'x' \rightarrow F(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{dGv(\vec{r}, \vec{r}')}{dx'} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (x - x') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ 'y' \rightarrow F(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{dGv(\vec{r}, \vec{r}')}{dy'} = \frac{e^{-j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot (y - y') \cdot (1 + j \cdot k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.45)$$

En este punto ya podemos aplicar el algoritmo de optimización de las posiciones por descenso de gradiente, pues hemos calculado todos los elementos necesarios.

En cuanto al coste computacional, se ha intentado contener empleando técnicas conocidas (ajuste dinámico del paso y detención del algoritmo automática), aunque sigue siendo relativamente elevado.

Una vez planteado el análisis, comentar que este algoritmo funciona de forma adecuada en aquellos casos en los que la disposición de las cargas se encuentra relativamente cercana a la estructura arbitraria. En los casos en los que las cargas imaginarias se encuentran alejadas, también produce una mejoría de los resultados pero de menor cuantía que en el otro caso. Indicar también que éste método es capaz de reducir el error de forma continuada, teniendo como límite teórico la presencia de un mínimo local, aunque en la práctica nunca llegaremos a él debido al alto coste computacional requerido y realizaremos la detención del algoritmo antes. No obstante, se observa empíricamente como el error se va disminuyendo conforme avanzan las iteraciones, si bien no de forma brusca, si de forma continuada, lo que confiere una mayor importancia a la fase de detención del algoritmo, pues nos limitará en buena medida el coste computacional del mismo.

Otro tema que también se ha tratado es la modificación de las posiciones de las cargas, para evitar que éstas no se introdujeran en el interior de la estructura arbitraria invalidando por tanto el modelo.

También indicar que en función de la disposición inicial de las imágenes, el método evolucionará de una forma u otra, obteniendo distintas mejorías al analizar una misma estructura.

En este punto, mostraremos el funcionamiento del algoritmo diseñado para un caso concreto, por ejemplo en el análisis de guía ridge. Para ello, emplearemos un número relativamente pequeño de imágenes, 25, situándolas de forma circular alrededor

de la estructura. Tal y como se mostró en el capítulo anterior, este método funciona especialmente bien para los casos en los que la carga se encuentre muy cerca de una de las paredes, por lo que ubicaremos la fuente cerca de la pared derecha, a una distancia de 1.3λ .

La situación de partida y final de las imágenes tras ejecutar el algoritmo son las siguientes:

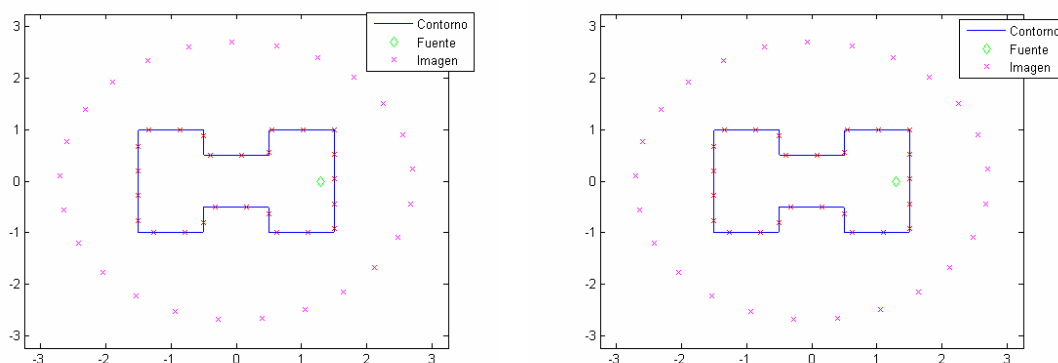


Figura 4.42 Situación de partida y fin de las 20 imágenes empleadas para analizar una guía ridge.

Aunque gráficamente es difícil apreciarlo, si se ha producido un desplazamiento en todas y cada una de las imágenes, con el fin de reducir el coste computacional existente.

En la situación inicial, el coste era de 82.98879, coste que se ha reducido mediante la técnica empleada a un total de 18.39929, reducción más que significativa.

Se han empleado un total de 300 iteraciones, como podemos observar en la figura siguiente:

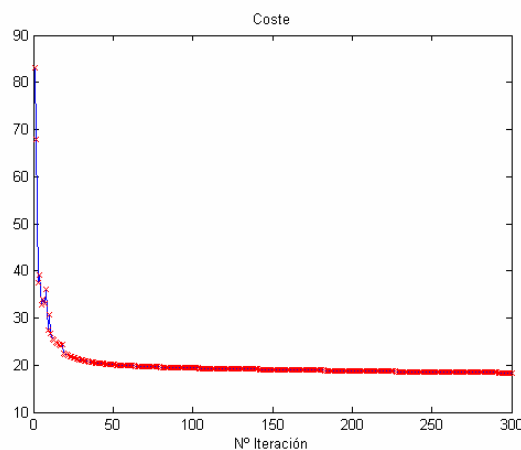


Figura 4.43 Evolución del coste en función del nº de iteración. Optimización de las posiciones de 25 imágenes alrededor de una guía ridge.

Comprobamos como la reducción más importante se realiza en la primera iteración, y como al aumentar éstas, el coste se sigue reduciendo, aunque de manera más lenta. Llegar a un coste menor es posible, a expensas de usar un enorme coste computacional para calcular las posiciones de las imágenes adecuadas.

4.4.4.5 Comparación de métodos

Finalmente, vamos a incluir una comparativa al realizar el análisis de distintas geometrías empleando diversos métodos de optimización. Para evitar que se extienda demasiado, supondremos que la fuente se encuentra en el centro de la guía en cuestión en todos los casos.

La comparativa la realizaremos empleando una distribución circular de las imágenes y luego optimizando el radio, y empleando una distribución especular y optimizando la distancia de separación entre las imágenes y la fuente.

Los resultados obtenidos son:

Guía	Tipo potencia 1	Coste al emplear el método			
		Situación circular	Variación dinámica radio	Situación especular	Variación dinámica especular
<i>Cuadrada</i> (40 imag)	Escalar	$2.509 \cdot 10^{-2}$	$4.9826 \cdot 10^{-3}$	$4.7579 \cdot 10^{-3}$	$3.6440 \cdot 10^{-3}$
	Vector	$2.4056 \cdot 10^{-2}$	$1.9070 \cdot 10^{-3}$	$5.6279 \cdot 10^{-3}$	$5.1761 \cdot 10^{-3}$
<i>Rectangula</i> <i>r</i> (40 imag)	Escalar	0.275278	0.212038	1.09934	$4.8600 \cdot 10^{-2}$
	Vector	0.678573	0.269808	2.24324	0.17082
<i>Rombo</i> (40 imag)	Escalar	$9.8149 \cdot 10^{-3}$	$2.16638 \cdot 10^{-3}$	$1.3790 \cdot 10^{-2}$	$2.153191 \cdot 10^{-3}$
	Vector	$2.78378 \cdot 10^{-2}$	$1.05136 \cdot 10^{-3}$	$7.8278 \cdot 10^{-2}$	$5.032605 \cdot 10^{-2}$
<i>Triangular</i> (45 imag)	Escalar	0.160588	0.1061812	$3.0333 \cdot 10^{-2}$	$1.34611 \cdot 10^{-2}$
	Vector	5.991492	2.969056	6.1234322	0.946024
<i>Cuadrada 2</i> <i>lad. red.</i> (60 imag)	Escalar	$7.6137 \cdot 10^{-2}$	$1.97709 \cdot 10^{-2}$	$5.3624 \cdot 10^{-3}$	No aplicable
	Vector	15.374627	15.301388	27.71187	No aplicable
<i>Estrella</i> (64 imag)	Escalar	137.94165	101.734617	7.414859	0.16391608
	Vector	80.24406	63.718314	23.161425	2.4190213
<i>Ridge</i> (64 imag)	Escalar	2492.7090	31.1311297	1.274900	0.14598025
	Vector	71496.71952	34.3531422	6.8313564	0.9585055

Tabla 4.1 Coste escalar y vector al analizar distintas guías con todos los métodos de optimización presentados.

En primer lugar observamos como para las guías cuadrada y rombo se obtiene resultados muy parecidos en los dos tipos de optimizaciones empleadas, siendo ligeramente superior la optimización del radio donde se ubican las imágenes. No obstante, para el resto de estructuras obtenemos un coste sensiblemente superior al optimizar la ubicación de las imágenes de forma especular, ya que se adapta a la forma de la estructura. Es interesante ver el orden de magnitud de los costes en función del método, y como con una correcta optimización se puede pasar de un coste de más 2492.7 a tan sólo 0.14598,

También indicar que no se ha introducido una comparativa realizando la optimización mediante un algoritmo de descenso de gradiente. Ello es debido a que al emplear un número tan elevado de imágenes las mejoras que proporcionan respecto a sus situaciones de partida no son destacables. Estos métodos funcionan de una forma

mucho mejor cuando el número de imágenes es reducido (hasta unas 35 imágenes), obteniendo un coste mucho menor en estos casos.

Otra posibilidad interesante es la combinación de técnicas, por ejemplo tras la optimización de la distancia de ubicación de imágenes de forma especular, realizar una optimización por descenso de gradiente (tanto del valor complejo de las cargas como de las posiciones de las imágenes, para el potencial escalar), optimizando todavía más el coste.

También cabe la posibilidad de que una ubicación de las imágenes sin optimizar, como por ejemplo siguiendo la estructura de la guía con imágenes muy cerca de la misma (en el caso de guías con entrantes por ejemplo, donde la optimización no puede llegar tan cerca) proporcione resultados mejores. Este puede ser el caso de la guía ridge, donde éste método es el que mejores resultados proporciona.

De forma general, podemos analizar cualquier estructura por todos los métodos presentados, advirtiéndole que, en función de las particularidades de cada geometría, unas técnicas funcionaran de un modo mucho más efectivo que otro.

4.5 Validación de resultados en una guía cuadrada

Hasta el momento hemos presentado resultados del cálculo de los potenciales escalar y vector en el interior de estructuras de geometría arbitraria bidimensionales, empleando una formulación en coordenadas cartesianas que habíamos validado para el caso de una guía circular.

Debemos de tener en cuenta la situación en la que estamos calculando estos potenciales: un corte infinitesimal en dos dimensiones de una guía. No ha sido posible encontrar distribuciones de potencial para un caso similar validadas empleando otras técnicas, con el fin de asegurarnos que los resultados que se han obtenido son correctos.

En este punto vamos a comparar los resultados de los potenciales obtenidos de una guía cuadrada, concretamente para un caso teórico en el que la guía es infinita en el eje 'z'. El cálculo de estos potenciales para este caso ha sido ampliamente estudiado en [10], empleando una técnica que combina las formulaciones espaciales y espectrales de la función de Green en la cavidad rectangular aplicando técnicas de aceleración de series en los dos dominios.

Aunque no es exactamente el mismo caso, si tiene ciertas semejanzas pues el eje 'z' es invariante en todo momento, mientras que en el corte infinitesimal directamente lo consideramos despreciable.

Para realizar el estudio, nos adecuaremos a los datos que tenemos de los potenciales, es decir, una guía cuadrada de $66 \times 66 \text{ mm}$. Emplearemos un total de 40 imágenes, distribuidas alrededor del cuadrado siguiendo su estructura. La frecuencia empleada en este caso la modificamos para adaptarla a los datos de que disponemos, siendo de 15 GHz.

Así la situación a analizar será:

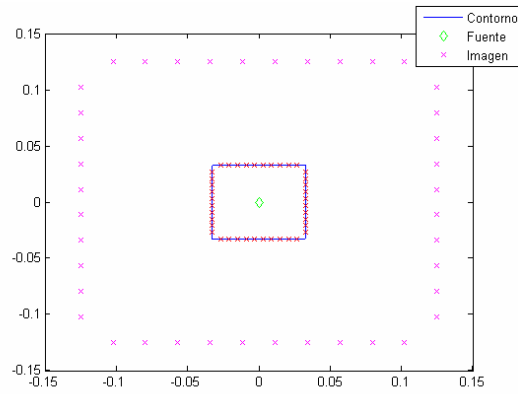


Figura 4.44 Análisis de una guía cuadrada, 40 imágenes. Fuente en el centro, 15 Ghz.

Realizaremos las comparaciones tomando varias distancias de ubicación de las imágenes, para ver como varían los resultados al variar este parámetro. Además, emplearemos un posicionamiento distinto para el potencial escalar y para el potencial vector (pues ya mostramos anteriormente que las posiciones en la que obtenemos un menor coste son distintas en los dos casos).

Se han realizado cortes a lo largo del eje 'x' a una distancia del borde inferior de 16.5mm, con el fin de evitar la singularidad y los posibles problemas de representatividad que pueda ocasionar.

En las gráficas siguientes comparamos los resultados en ese corte empleando el método descrito en [10], con el método desarrollado en este capítulo. Las distintas distancias de las imágenes alrededor de la guía se indican mediante la variable “separa”, en términos relativos desde el centro de la guía hasta un borde.

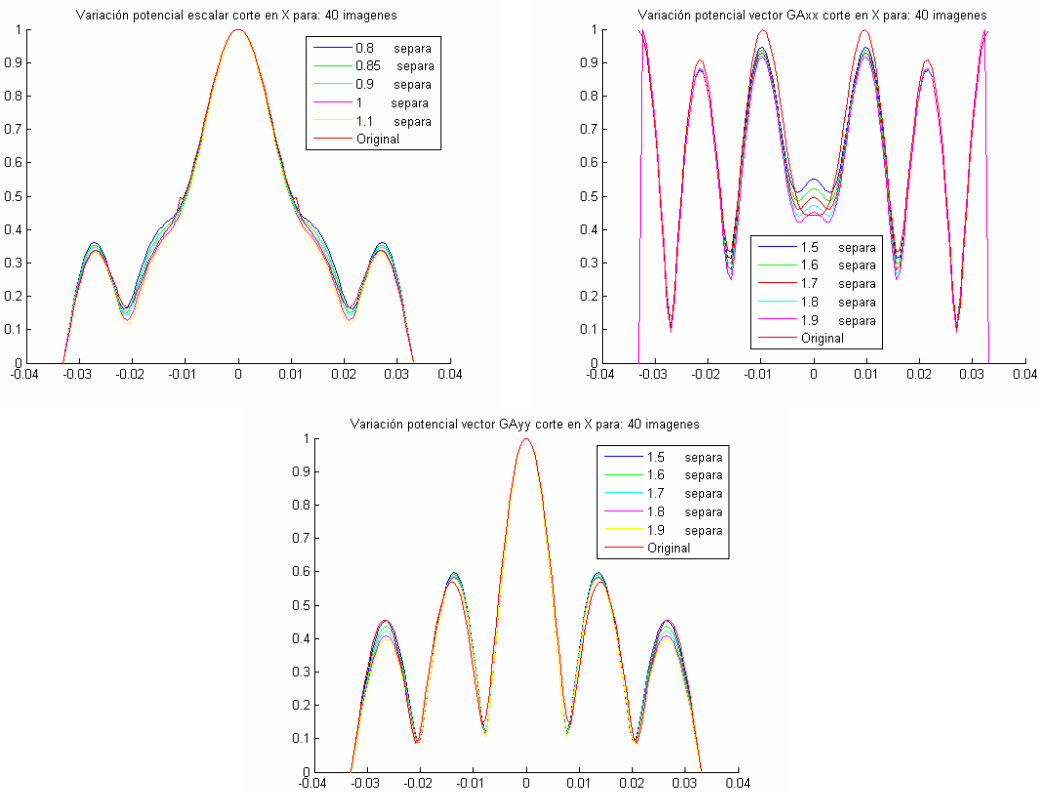


Figura 4.45 Potenciales normalizados en un corte a 16.5m a lo largo del eje 'x' desde el borde inferior en una guía cuadrada de 66x66mm. Comparativa de método imágenes y método analítico descrito en [10].

Comprobamos como los resultados obtenidos son muy buenos, obteniendo unas diferencias mínimas entre los dos métodos, a pesar de haber empleado distintas posiciones de las imágenes para envolver a la estructura.

Indicar que también que se han realizado otras comprobaciones a otras frecuencias y otros cortes para esta misma guía cuadrada, obteniendo siempre una convergencia muy buena con los resultados analíticos mostrados en [10].

De esta forma, y a pesar de que como comentamos anteriormente no estamos representando exactamente el mismo resultado, podemos dar por válidos los resultados y el cálculo de potenciales realizado hasta ahora así como la formulación presentada como correcta.

Así, el método presentado es capaz de calcular los potenciales en el interior de cualquier estructura, con una precisión que también podemos acotar.

En este punto, se abre la puerta a analizar estructuras reales: geometrías en tres dimensiones donde deberemos de considerar la variación en el eje “z”. De esta forma, podremos validar los resultados obtenidos en aquellas guías que presentan soluciones analíticas (por ejemplo la cuadrada) y también en otras más complejas, empleando para ello como apoyo un software comercial como HFSS©.

4.6 Software desarrollado

En este caso, y a diferencia del capítulo anterior en el que existían una gran cantidad de programas Fortran 90 realizando cada uno un tipo de optimización, se ha diseñado un único programa capaz de analizar cualquier estructura definida y de proporcionar todos los resultados.

Para indicarle al software que estructura queremos analizar así como la posible optimización de coste que vamos a llevar a cabo sobre ella, emplearemos dos ficheros de configuración principales:

a) Geom.in: Que ya fue expuesto en el apartado 4.3.2, y en el que se definen todas las características de la estructura que va a ser analizada: vértices, tramos rectos, tramos curvos, etc. Además, se añade información acerca de la ubicación de la fuente puntual en el interior de la guía.

b) Datos.in: Este fichero sirve para introducir parámetros de configuración como la frecuencia, número de puntos de la rejilla sobre la que presentar los datos, número de imágenes empleadas, disposición de los puntos tangentes alrededor de la estructura, forma de ubicar las imágenes, y tipo de optimización (tanto escalar como vectorial). Un ejemplo de este fichero de configuración es:

```
! Datos de entrada del programa
! Frecuencia
3.0D8
! Número de cargas/dipolos imagen.
40
! Número de puntos de la rejilla (x,y)
81      81
! Ubicación de pto tangentes
0
! Ubicación de imágenes
```


5
! Distancia empleada (en función del método)
1
! Optimización gradiente imágenes
0
! Optimización gradiente posiciones
0

Comprobamos como los primeros parámetros son comunes a los que necesitaban los programas empleados en capítulos anteriores: frecuencia, número de imágenes y número de puntos de la rejilla.

Posteriormente, aparecen nuevos parámetros como son:

a) *Ubicación de ptos tangentes:*

Este parámetro se refiere a la forma a la que vamos a distribuir los puntos tangentes alrededor de la estructura. Sus posibles valores son:

<i>Valor</i>	<i>Tipo de Distribución de puntos en la estructura</i>
0	De forma uniforme, saltando los vértices
1	De forma uniforme, sin considerar los vértices
2	En los vértices, el resto de forma uniforme
3	Un 70% uniforme, el resto en función de la distancia media de la fuente al tramo.

Tabla 4.2 Posibles valores del parámetro “Ubicación de ptos tangentes”

b) *Ubicación de imágenes:*

Este parámetro hace referencia a la manera en la que ubicaremos las distintas imágenes alrededor de la estructura. Los posibles valores son:

<i>Valor</i>	<i>Tipo de Distribución de imágenes</i>
0	Circular, radio en función de la estructura
1	Circular, variando el radio de forma dinámica para minimizar el coste
2	Ubicación especular, en función de una distancia de apoyo
3	Igual que 2, pero trata los tramos rectos de forma especial
4	Variación dinámica de la distancia especular. No permite trabajar con tramos curvos.
5	Se sigue el contorno de la estructura a una determinada distancia.

Tabla 4.3 Posibles valores del parámetro “Ubicación de imágenes”

c) *Distancia empleada:*

Este parámetro controla la separación de las imágenes a la estructura, en el caso de que las imágenes sigan a la misma ó la distancia de separación de especular entre las imágenes y la fuente.

d) *Optimización gradiente imágenes:*

Indica si se realizará la optimización por descenso de gradiente de las cargas, de tal forma que un ‘0’ indica que no se realizará y un ‘1’ que sí.

e) Optimización gradiente posiciones:

Indica si se realizará la optimización por descenso de gradiente de las posiciones, de tal forma que un '0' indica que no se realizará y un '1' que sí.

De esta forma, el software genera de manera automática cualquier estructura, distribuye los puntos tangentes sobre la misma así como las imágenes de la forma en la que se indicó. Posteriormente, calcula los potenciales llevando a cabo las optimizaciones indicadas.

Para la visualización de los datos, también se ha diseñado un único "script" de Matlab© denominado "Inicio.m". Tras ejecutarlo, se obtienen todos los datos: visualización de los potenciales en el interior de la estructura, distribución del coste escalar y vector sobre cada tramo, cortes de los potenciales en los eje 'x' e 'y', etc.

Finalmente destacamos el gran automatismo conseguido con el software, siendo capaz de analizar cualquier tipo de estructura mediante el método de las imágenes espaciales, representando fácilmente los datos.

5. Análisis de cavidades tridimensionales

5.1 Introducción

Una de las ventajas que tiene la técnica desarrollada en los capítulos anteriores es que puede extenderse fácilmente a cavidades en tres dimensiones, es decir, considerando el eje ‘z’ que hasta ahora no habíamos tenido en cuenta. Para ello vamos a situar “tapas” en la parte inferior y superior de la estructura, dejándola totalmente cerrada.

Además, el interior de la guía a analizar no tiene porqué ser aire (como hemos considerado hasta ahora al emplear la función de Green en espacio libre), sino que puede estar compuesto por un medio multicapa, teniendo cada capa un dieléctrico diferente que caracterizaremos por su permitividad.

De esta forma parámetros como la frecuencia ó dimensión eléctrica van a adquirir una importancia mucho mayor, pues nos van a definir totalmente la cavidad y la forma que los potenciales van a adquirir en su interior.

Realizaremos todos los cálculos suponiendo fuentes eléctricas en el interior de las cavidades; para el caso de fuentes magnéticas el desarrollo es similar (aunque no dual, pues cambia el tipo de fuente pero no el tipo de pared).

La forma de extender la formulación actual a una que tenga en cuenta las características anteriores se realiza mediante la sustitución de las funciones de Green en espacio libre empleadas hasta ahora por funciones de Green multicapa formuladas en el dominio espacial mediante la transformación de Sommerfeld [9]. El empleo de esta transformada no únicamente permite considerar las distintas cavidades como medios multicapa con distintos dieléctricos, sino que impone de forma inmediata las condiciones de contorno a cumplir en las “tapas” superior e inferior de la estructura.

Así, situaremos un “anillo” de imágenes alrededor de la estructura, ubicándose a la misma altura en la que se encuentra la fuente en el interior. De esta forma, impondremos las condiciones de contorno que necesitamos en puntos discretos de la cavidad, actuando los mismos tanto en el plano (x,y) como en el eje ‘z’.

A continuación analizaremos los potenciales de cavidades tridimensionales; en primer lugar emplearemos para ello la formulación en cilíndricas presentada en el capítulo 2 (como se detalla en [6]) con el fin de analizar este tipo de geometrías; posteriormente aplicaremos la transformación de Sommerfeld a la formulación en cartesianas para geometrías arbitrarias presentada en el capítulo 4.

De este modo podemos analizar cavidades tridimensionales que no sean eléctricamente grandes, es decir, que su longitud en el eje ‘z’ en términos de longitud de onda sea pequeña, ya que empleamos un único anillo imágenes para analizar toda la cavidad y éste se muestra insuficiente si la altura de la misma es eléctricamente elevada.

Obtendremos de esta forma los potenciales a la altura en la que hemos situado el anillo de casi cualquier cavidad, sin más que definir la misma tal y posteriormente indicar las características que presenta en torno al eje ‘z’: altura, dieléctricos en cada capa, etc. Además validaremos los resultados para el caso de una guía cuadrada con el método analítico mostrado en [10], consistente en una combinación de la formulación espacial-espectral de Green. Se obtiene una convergencia total de ambos métodos, validando así el desarrollo presentado.

Posteriormente abordaremos el estudio de cavidades con una altura eléctrica cualquiera, empleando para ello no un único anillo como hasta ahora, sino un conjunto de anillos espaciados en altura entre sí que envuelven de forma completa la estructura, imponiendo las condiciones de contorno a diferentes alturas. Estos anillos están formados por imágenes que van a interactuar todas con todas y con todos los puntos de la cavidad sobre los que se imponen las condiciones de contorno, creándose un sistema de ecuaciones de orden elevado.

Gracias a este método, conseguimos evaluar los potenciales en el interior de cualquier estructura, independientemente de su altura eléctrica. No obstante el coste computacional aumenta de forma proporcional con el número de anillos, siendo por tanto un factor determinante.

Este método se ha implementado tanto para cavidades circulares como para cavidades arbitrarias, y será validado con una guía cuadrada eléctricamente grande empleando el método descrito en [10].

Según el teorema de unicidad [8], la solución a un problema de electromagnetismo es única cuando se han impuesto todas las condiciones de contorno. En el caso que estamos presentando esta afirmación no es del todo correcta ya que las condiciones de contorno se cumplirán en puntos discretos de la estructura y no en todo su alrededor como requiere el teorema. Además, la implementación de las integrales de Sommerfeld no es exacta en todos los casos, pudiendo existir pequeñas variaciones. Todo esto nos lleva a que distintas situaciones de imágenes alrededor de una cavidad nos van a proporcionar distintos potenciales en el interior de la misma, tal y como ocurría en el problema bidimensional (donde no tenía sentido el teorema de unicidad, pues las condiciones de contorno no estaban impuestas en las tapas).

En el último apartado, mostraremos un método para el cálculo de las frecuencias de resonancia de la cavidad. Concretamente, evaluaremos los potenciales en un punto discreto en el interior de la guía arbitraria en función de la frecuencia, obteniendo “picos” de potencial a las frecuencias de resonancia. La representación de los potenciales en el interior de las guías a esa frecuencia nos mostrará la distribución del modo excitado. Es muy importante la elección tanto de la ubicación de la fuente como del punto fijo de observación: la fuente debe de ser capaz de excitar el modo en cuestión y el punto de observación no debe de encontrarse en un mínimo de la distribución del modo. Compararemos las frecuencias de corte en guías con solución analítica (como por ejemplo la cuadrada) y no analítica, empleando para ello el software de electromagnetismo comercial HFSS®. Su empleo además nos permitirá una comparación de la distribución del potencial en las frecuencias de resonancia, obteniendo los modos a los que resuena cada estructura.

5.2 Análisis de cavidades eléctricamente cortas

5.2.1 Transformada de Sommerfeld

Un estudio detallado de la transformada Sommerfeld puede encontrarse en [9], aquí nos referiremos a ella de forma aplicada al método de imágenes espaciales, no siendo objetivo del presente proyecto un estudio detenido de la transformada Sommerfeld.

Básicamente esta transformada consiste en obtener la función de Green en el dominio espacial partiendo de su definición en el dominio espectral, donde podemos definir los distintos medios y sus características con una mayor facilidad.

La transformada de Sommerfeld puede expresarse para un caso general como:

$$G(\rho) = S_n[\tilde{G}] = \int_0^{\infty} J_n(k_\rho \rho) k_\rho^{n+1} \tilde{G}(k_\rho) dk_\rho \quad (5.1)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{G}(k_\rho) \rightarrow & \text{Función de Green en el dominio espectral} \\ G(\rho) \rightarrow & \text{Función de Green en el dominio espacial.} \\ J_n(k_\rho \rho) \rightarrow & \text{Función de Bessel de primera especie y orden 'n'} \\ \rho \rightarrow & \text{Distancia entre punto fuente y observación.} \end{array} \right.$$

Para un medio estratificado, los potenciales base son derivados del dominio espectral, empleando para ello las corrientes y voltajes evaluadas en una línea de transmisión transversal equivalente, que describirá al medio estratificado. Un estudio detallado de estos conceptos se puede encontrar en [14] y [2].

Para los potenciales aquí estudiados obtenemos unos valores de:

$$\tilde{G}_v = \frac{w}{k_\rho^2} \left[j \cdot V_J^{TM}(z) + \frac{V_J^{TE}(z)}{j} \right] \quad (5.2)$$

$$\tilde{G}_A^{xx} = \tilde{G}_A^{yy} = \frac{V_J^{TE}(z)}{j\omega} \quad (5.3)$$

Donde el voltaje V_J^{TM} es evaluado en la línea de transmisión transversal equivalente bajo una excitación TM, mientras que el voltaje V_J^{TE} lo es bajo una excitación TE.

5.2.2 Descripción de la cavidad

Para poder calcular la transformada de Sommerfeld teniendo en cuenta las características de la cavidad en cuestión, deberemos de definir la misma.

Una primer paso, consiste en la definición de sus características en el plano X-Y, tal y como se realizó para un corte infinitesimal de la estructura en los capítulos 2 y 4. Así, emplearemos estructuras circulares (empleando para su análisis la formulación en cilíndrica presenta en el capítulo 2), y también estructurar bidimensionales más arbitrarias (analizadas con la formulación en cartesianas desarrollada en el capítulo 4) definiendo las mismas por sus vértices en el fichero de configuración 'Geom.in'

En este punto deberemos de describir la estructura a analizar respecto a su eje "z", es decir, en altura.

Para obtener las transformadas de Sommerfeld vamos a aprovechar un software que realiza su cálculo, estando las características técnicas de la evaluación de la transformada realizada en [10].

Por tanto, deberemos de describir la cavidad que estamos analizando de manera apropiada con el fin de que el cálculo de la transformada de Sommerfeld sea el adecuado. Para ello, tenemos una gran versatilidad, pudiendo configurar en el fichero de entrada “t1m7.in” una gran cantidad de parámetros como. Un ejemplo de este fichero será:

```

INPUT DATA
-----
1) Number of layers in the structure
  2
2) Top and bottom covers (Free-space=0, Ground plane=1).
  [Top - Bottom]
  1   1
3) Nature of top region (Laterally opened=1, shielded=2)
  2
4) Geometry of all layers.
  [Thickness (mm) - Epsr - tandd - Mur - tandm ].
  1 15.0000  1.0 0.00  1.0 0.0
  2 15.0000  1.0 0.00  1.0 0.0
5) Number of Sources
  1
6) Types of sources and order of the layer below sources
  [Source- Type- Layer]
  1   1   2
7) Numerical integration parameters.
  [nT1, axis - nT2, nit, ninterp - per period]
  30 0.8  35 35  2000  20
8) Minimum value for the normalized spatial variable.
  0.001
9) Number of spatial variable points.
  100
    
```

En primer lugar, se indicará el número de capas de que consta la estructura (en altura). Si vamos a situar una fuente puntual a mitad del eje ‘z’, tendremos dos capas, necesitando la intersección para situar ahí la fuente. Se pueden definir más capas, especificando posteriormente sus características.

El apartado 2) indicará las “tapas” de la estructura, pudiendo incluirlas (1) dejar la estructura abierta (0).

A continuación en 3), se indica el tipo de tapa, pudiendo estar lateralmente abierta (1) ó totalmente cerrada (2).

Después, deberemos de indicar las características de cada una de las capas incluidas. Así, especificaremos su número relativo, su grosor en milímetros, su permitividad eléctrica, permeabilidad magnética, etc.

En 5) indicaremos el número de fuentes que vamos a emplear, y en 6) la ubicación de las mismas en cuanto a las capas. Destacar aquí que se sigue un orden inverso en la numeración en cuanto a las capas y fuentes:

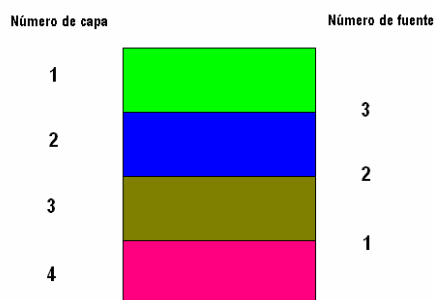


Figura 5.1 Numeración de capas y fuentes

También indicar que el tipo de fuente puede ser eléctrica (1) ó magnética (2).

En cuanto al resto de parámetros, se refieren a la precisión de las integrales de la transformada Sommerfeld.

De esta forma, definiremos completamente la cavidad que estamos analizando, obteniendo así unos resultados de las integrales de Sommerfeld adecuados.

Al ubicar un “anillo” de imágenes alrededor de la estructura a analizar, debemos de tener en cuenta que ello implica una “capa” más en la configuración de entrada para la obtención de la transformada Sommerfeld (debido a que en ese corte se situará una fuente que debe de ser descrita). Por tanto, si necesitamos emplear una serie de anillos distribuidos a distintas alturas será necesario definir un conjunto de “capas”. Al utilizar el software, como se describirá en un apartado posterior, se le da al usuario la posibilidad de describir el fichero “t1m7.in” y todas sus capas de forma manual ó dejar que el propio software establezca una configuración apropiada.

Comentar finalmente las grandes posibilidades que nos abre el empleo de esta técnica: podemos evaluar cavidades compuestas por un gran número de “capas” de distintos dieléctricos, obteniendo así sus potenciales. Además, podemos considerar las cavidades con o sin “tapas”. Ello nos permitirá analizar estructuras reales, como filtros, antenas, etc. obteniendo resultados prácticos válidos, como puede comprobarse en [6].

A lo largo de este capítulo vamos a analizar cavidades que, a pesar de estar definidas con varias “capas”, todas ellas tendrán la permitividad del aire, es decir, 1. No obstante, el software permite analizar estructuras definidas con capas de distinto dieléctrico, como mostraremos en el capítulo siguiente.

5.2.3 Análisis de cavidades circulares

En este apartado, vamos a extender la formulación en coordenadas cilíndrica presentada en el capítulo 2 con el fin de poder analizar cavidades considerando la altura de la misma (imponiendo “tapas” a la parte inferior y superior de la estructura), así como medios multicapa compuestos por dieléctricos de distinta permitividad.

Esta extensión se puede realizar de forma sencilla, sin más que sustituir la función de Green de espacio libre empleada por la función de Green multicapa proporcionada por la transformación de Sommerfeld.

La técnica por lo demás sigue siendo idéntica a la presentada hasta ahora: situaremos imágenes discretas alrededor de la cavidad (ahora teniendo en cuenta su altura y la altura de la fuente) e impondremos condiciones de contorno en puntos discretos de la pared.

Los potenciales calculados se presentarán en un determinado corte X-Y a la altura donde esté situada la fuente en el interior de la cavidad (salvo que se indique lo contrario), pudiéndose calcular a otra altura. Para ello, se definirá una nueva “capa” hasta la altura donde se quiere realizar la medida, obteniendo los potenciales en ese nuevo plano.

Para el caso del *cálculo del potencial escalar*, encontrábamos el valor complejo de las cargas imágenes solventando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^N q_k G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = -G_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \quad (5.4)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Sustituiremos la función de espacio libre de Green por la función de Green obtenida en el dominio espacial, que podemos calcular fácilmente mediante la transformada de Sommerfeld de orden 0:

$$G_v(\rho) = S_0[\tilde{G}_v(k_\rho)] \quad (5.5)$$

En este punto sin más que resolver el sistema de ecuaciones 5.4 obtendremos el valor complejo de las imágenes necesarias para recomponer el potencial escalar en el interior de la cavidad circular. Este potencial escalar calculado, según hallamos definido la cavidad circular en cuanto altura, tapas, dieléctricos empleados, etc. ya tendrá en cuenta estas consideraciones.

A continuación, vamos a tratar de obtener el *potencial vector*, sustituyendo nuevamente las funciones de Green de espacio libre por la función de Green obtenida en el dominio espacial. Para ello usaremos en primer lugar la transformación:

$$G_A^{xx}(\rho) = G_A^{yy}(\rho) = G_A(\rho) = S_0[\tilde{G}_A(k_\rho)] \quad (5.6)$$

El sistema de ecuaciones que debíamos resolver (tal y como desarrollamos en el capítulo 2) para obtener los valores complejos de los dipolos imágenes (tanto orientados en el eje 'x' como en el eje 'y') es el siguiente:

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^x + \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \cdot I_k^y &= -\sin(\varphi_i) \cdot G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_o') \\ \cos(\varphi_i) \cdot \sum_{k=1}^N C_{i,k}^x I_k^x + \sin(\varphi_i) \sum_{k=1}^N C_{i,k}^y I_k^y &= -\cos(\varphi_i) \cdot C_{1,0}^x \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N$$

Donde habíamos definido las constantes $C_{m,n}^x$ como:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \frac{G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \nabla G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \\ C_{i,k}^y &= \frac{G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \nabla G_A^{yy}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \end{aligned} \quad (5.8)$$

Comprobamos en este punto como deberemos de emplear tanto la transformada de Sommerfeld de orden 0 para la función espacial de Green, como la transformada de Sommerfeld de orden 1. La transformada de orden 1, definida en [15], hace referencia a la derivada de la función espacial de Green y cumple la propiedad:

$$S_1(x) = -\frac{\partial S_0(x)}{\partial x} \quad (5.9)$$

Esta propiedad la aprovecharemos para calcular el gradiente definido en la ecuación 5.8. Además, para el paso entre los dominios espacial y espectral sabemos que:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial G_A(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\partial x} \rightarrow \tilde{B} = jk_x \cdot \tilde{G}_A(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \\ C &= \frac{\partial G_A(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\partial y} \rightarrow \tilde{C} = jk_y \cdot \tilde{G}_A(\vec{r}_i, \vec{r}_k') \end{aligned} \quad (5.10)$$

Donde ‘B’ y ‘C’ son las derivadas en el dominio espacial, mientras que ‘ \tilde{B} ’ y ‘ \tilde{C} ’ se encuentran en el dominio espectral.

De esta forma ya podemos calcular la ecuación 5.8 en el dominio espectral:

$$\tilde{C}_{i,k}^x = \frac{\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \tilde{\nabla} G_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k') = \frac{\tilde{G}_A^{xx}}{\rho} + \hat{e}_p \cdot [jk_x \tilde{G}_A^{xx} \cdot \hat{e}_x + jk_y \tilde{G}_A^{xx} \cdot \hat{e}_y] \quad (5.11)$$

Y su paso directo al dominio espacial:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \frac{S_0(\tilde{G}_A^{xx})}{\rho} + \hat{e}_p \cdot \left[-\cos(\varphi) \cdot S_1(\tilde{G}_A^{xx}) - \sin(\varphi) \cdot S_1(\tilde{G}_A^{xx}) \right] = \frac{S_0(\tilde{G}_A^{xx})}{\rho} - \hat{e}_p \cdot \hat{\mu}_\rho \cdot S_1(\tilde{G}_A^{xx}) = \\ &= \frac{S_0(\tilde{G}_A^{xx})}{\rho} - \hat{e}_p \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot S_1(\tilde{G}_A^{xx}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Donde el vector unitario $\hat{\mu}_\rho$ es el que une el punto fuente situado en el interior de la estructura y el punto tangente a la misma donde se impone la condición de contorno.

El cálculo de la otra ecuación definida en 5.8 es exactamente igual, sin más que sustituir \tilde{G}_A^{xx} por \tilde{G}_A^{yy} . De esta forma, ya tenemos todos los elementos para resolver el sistema de ecuaciones 5.7, pues hemos definido todas las transformaciones de Sommerfeld necesarias para ello. Así, obtenemos los valores complejos de los dipolos (tanto orientados en ‘x’ como en ‘y’), consiguiendo así obtener los potenciales vector en el interior de la estructura circular

Una vez obtenidos los valores de las imágenes, la reconstrucción de los potenciales se realiza de forma idéntica a la mostrada en el capítulo 2:

$$\begin{aligned} G_{vy}(\vec{r}) &= S_0[\tilde{G}_v(\vec{r}, \vec{r}_o')] + \sum_{k=1}^N q_k \cdot S_0[\tilde{G}_v(\vec{r}, \vec{r}_k')] \\ G_{Acy}^{xx}(\vec{r}) &= S_0[\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0')] + \sum_{k=1}^N I_k^x \cdot S_0[\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')] \\ G_{Acy}^{yx}(\vec{r}) &= \sum_{k=1}^N I_k^y \cdot S_0[\tilde{G}_A^{yx}(\vec{r}_i, \vec{r}_k')] \end{aligned} \quad (5.13)$$

La situación que tenemos tras realizar este cambio de formulación, es que podemos analizar cilindro con “tapas” inferior y superior, teniendo por tanto una determinada longitud en el eje ‘z’.

Así podríamos analizar una cavidad cilíndrica cualquiera. Por ejemplo, vamos a analizar una cilindro de radio 1 metro, con una altura de 0.5 metros, empleando para ello un total de 40 imágenes. La fuente puntual la hemos situado en el centro del cilindro, a una altura de 0.25 metros.

La situación que estamos planteando es la siguiente:

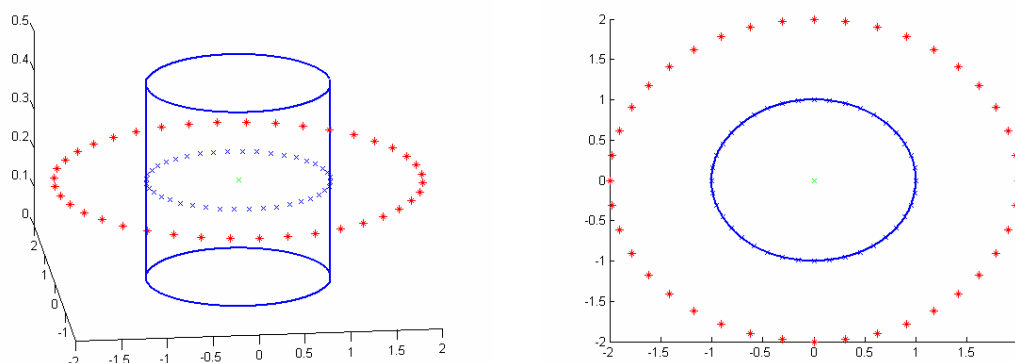
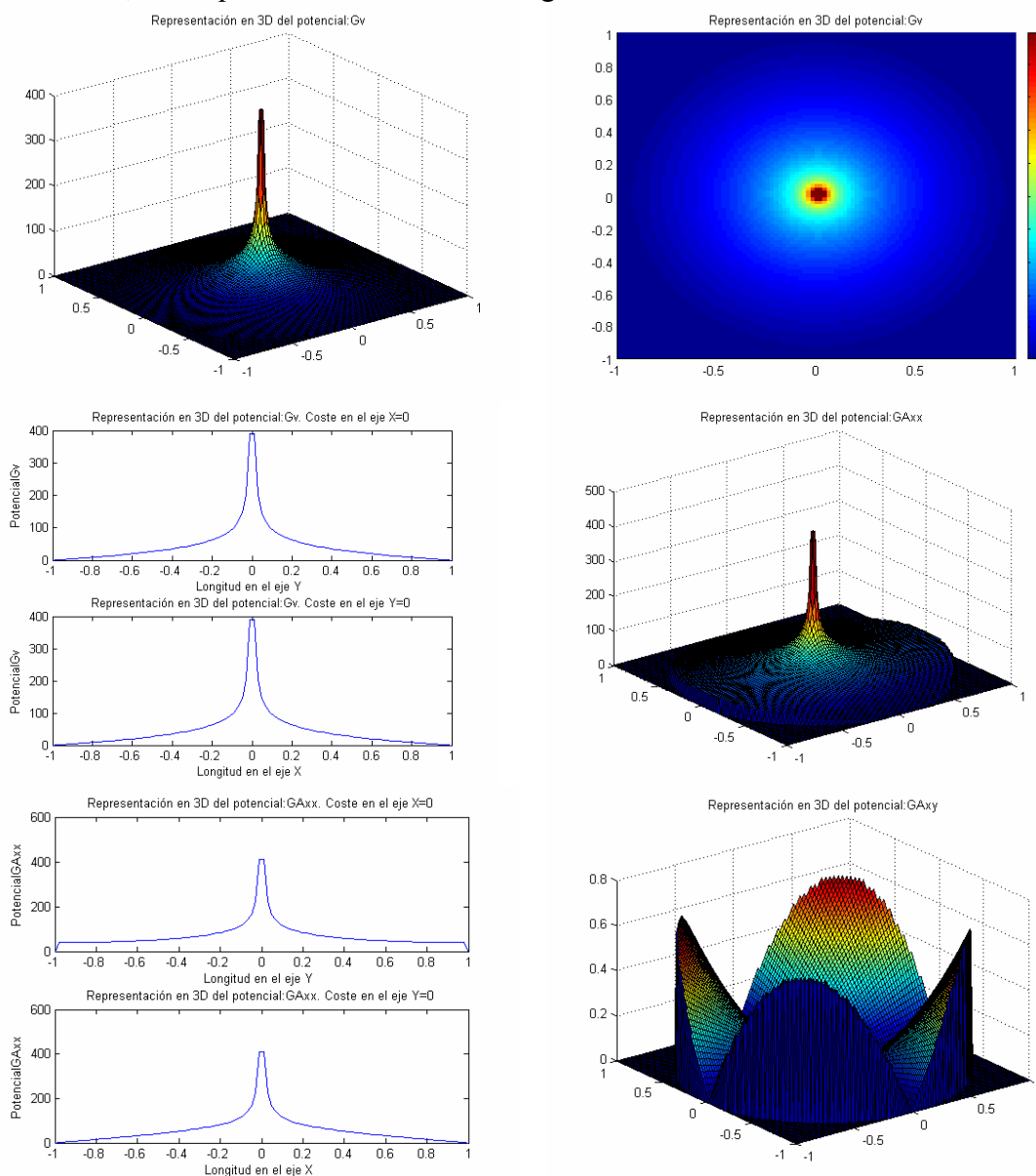


Figura 5.2 Cilindro a analizar. Radio 1 metro, altura 0.5 metros. 40 imágenes situadas de forma uniforme alrededor de la estructura. Fuente en el centro, a 0.25 metros de altura.

Realizaremos dos análisis a dos frecuencias diferentes, en primer lugar a 300Mhz. Los cortes se muestran a la altura de la fuente. Al utilizar una frecuencia relativamente baja, no aparecen una gran cantidad de oscilaciones al representar los potenciales, como podemos observar en la figura 5.2



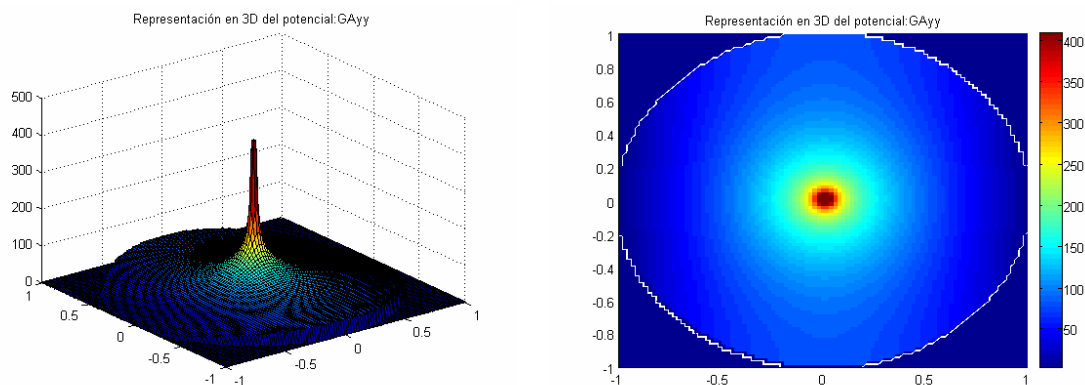
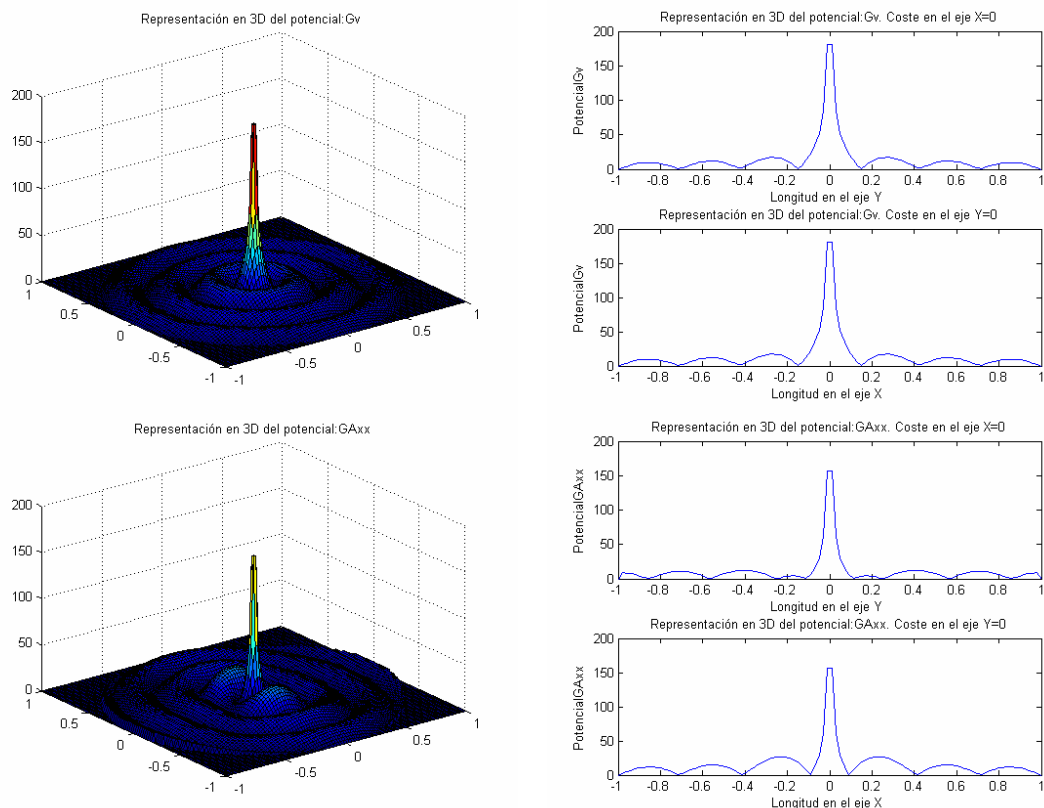


Figura 5.3 Representación de potenciales en el interior de una guía cilíndrica, 1 metro de radio, 0,5 de alto, 40 imágenes alrededor. Fuente en el centro, a 0.25metros. 300Mhz.

Comprobamos como hemos obtenido los potenciales tanto escalar y vector en el interior de la guía; el tiempo de cálculo ha sido muy reducido. Debido al empleo de una frecuencia relativamente pequeña (300Mhz), la altura eléctrica del cilindro también lo es (de tan solo 0.5λ , es decir 0.25λ en la parte superior e inferior del anillo de imágenes). Es por ello que los potenciales decrecen de forma clara y no se producen oscilaciones.

Si aumentamos la frecuencia a 600Mhz (manteniendo igual el resto del análisis), observamos como estas oscilaciones ya comienzan a aparecer:



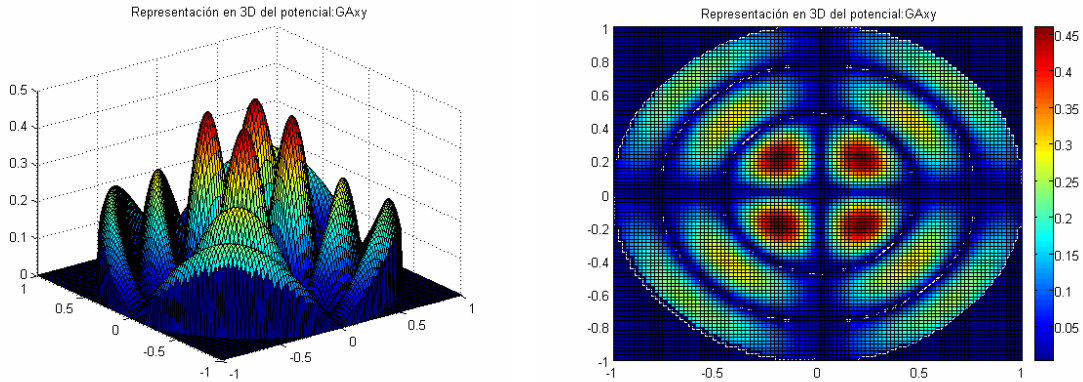


Figura 5.4 Representación de potenciales en el interior de una guía cilíndrica, 1 metro de radio, 0.5 de alto, 40 imágenes alrededor. Fuente en el centro, a 0.25 metros. 600Mhz.

Observamos como los resultados son coherentes en todo momento con los esperados, obteniéndose los potenciales de forma correcta.

Indicar que se han realizado múltiples pruebas, obteniendo una concordancia total al variar el número de imágenes, con convergencia muy rápida.

Para mostrar la variación de los resultados en función de la ubicación de las imágenes, vamos a mostrar los cortes en el eje X, al situar una carga en la centrada en la tapa inferior del cilindro, manteniendo este su configuración habitual (con 1 metro de radio y 0.5 metros de altura) y empleando un total de 50 imágenes. La frecuencia será de 300Mhz.

Hemos variado la configuración respecto al caso anterior para mostrar la robustez de la formulación ante distintas situaciones. Comprobamos como los cortes obtenidos se mantienen totalmente estables independientemente de la posición relativa de los mismos respecto al centro (indicado en la variable separa):

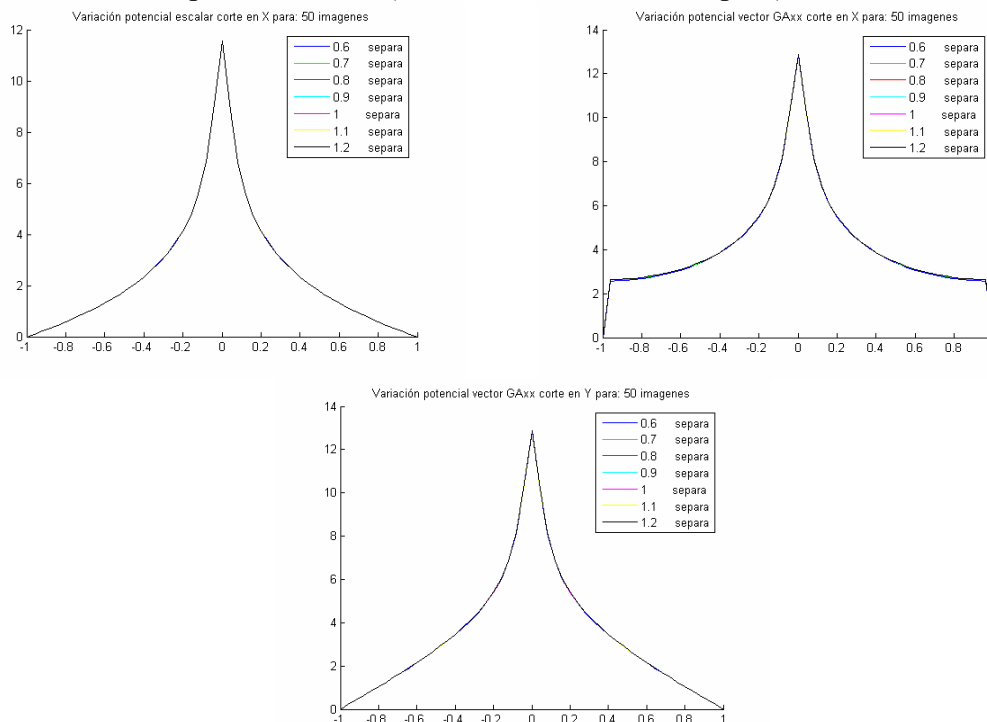


Figura 5.5 Corte de los potenciales en el eje X en función de distintas distancias de ubicación de las 50 imágenes empleadas al analizar una guía circular de radio 1metro, 0.5 metros de alto. 300 Mhz.

En cuanto a la validación del método, esta se ha realizado en [6], donde se comprueban sus resultados satisfactorios empleando esta técnica en el análisis de filtros de microondas.

5.2.3 Análisis de cavidades arbitrarias

En este apartado, vamos a extender la formulación en coordenadas cartesianas presentada en el capítulo 4, con el fin de poder analizar cavidades cerradas, considerando las “tapas” de las mismas y su altura. También será posible definir distintos dieléctricos en el interior de la cavidad, definiendo por tanto un medio estratificado.

Como ocurría en la formulación en cilíndricas, los potenciales calculados se presentarán en un determinado corte X-Y a la altura donde esté situada la fuente en el interior de la cavidad (salvo que se indique lo contrario), pudiéndose calcular a otra altura.

Al igual que en el apartado anterior, la extensión de la formulación se realizará de forma sencilla, sustituyendo la función de Green de espacio libre por la función de Green espacial proporcionada por la transformada de Sommerfeld.

La técnica presentará las mismas características que las presentadas anteriormente: analizaremos estructuras arbitrarias (cuadradas, rectangulares, triangulares, rombo, ridge, dual, etc), poniéndoles las “tapas” tanto superior como inferior. Así las estructuras quedarán totalmente definidas en 3 dimensiones, pudiendo analizar los potenciales en su interior.

La ubicación de imágenes y los puntos discretos de la estructura en donde cumplir las condiciones de contorno, seguirán siendo factores determinantes a la hora de obtener unos resultados válidos.

Centrándonos ya en la formulación para este caso, el caso del potencial escalar será idéntico al desarrollado en el apartado anterior, pues ambas formulaciones (en coordenadas cilíndricas y cartesianas) lo tratan de la misma manera. Por tanto, deberemos de resolver el sistema de ecuaciones 5.14 con el fin de obtener los valores complejos de las cargas que nos permitan calcular el potencial escalar.

$$\sum_{k=1}^N q_k \cdot S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r}_i, \vec{r}_k')] = -S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r}_i, \vec{r}_o')] \quad (5.14)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N$

Donde hemos empleado la transformada de Sommerfeld de orden 0.

A continuación, vamos a realizar el desarrollo del *potencial vector*, sustituyendo nuevamente las funciones de Green de espacio libre por la función de Green obtenida en el dominio espacial (ecuación 5.6). Supondremos que el dipolo fuente se encuentra orientado a lo largo del eje ‘x’, siendo el desarrollo y resultado para el caso en el que se encuentra situado en el eje ‘y’ totalmente dual.

El sistema de ecuaciones a resolver es el mostrado en la ecuación 5.7, pero con el cambio en las constantes $C_{m,n}^x$, estando ahora definidas mediante:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \cos(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} \\ C_{i,k}^y &= \sin(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial y} + \cos(\varphi) \frac{\partial A_y(\vec{r}_i, \vec{r}_k)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Observamos el cambio debido a la formulación en coordenadas cartesianas, y como nuevamente se requiere el empleo de la transformada de Sommerfeld de orden 1 para realizar el cálculo de las derivadas.

En primer lugar, expresaremos la ecuación 5.15 en el dominio espectral:

$$\tilde{C}_{i,k}^x = \cos(\varphi) \cdot jk_x \cdot A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k) + \sin(\varphi) jk_y \cdot A_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k) \quad (5.16)$$

Posteriormente, volveremos a calcularlo en el dominio espacial, mediante la transformada de Sommerfeld:

$$\begin{aligned} C_{i,k}^x &= \cos(\varphi) \cdot \left(-\cos(\theta) \cdot S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \right) + \sin(\varphi) \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \right) = \\ &= -S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \cdot (\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)) = \\ &= -S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \cdot [(\cos(\varphi) \cdot \hat{e}_x + \sin(\varphi) \cdot \hat{e}_y) \cdot (\cos(\theta) \cdot \hat{e}_x + \sin(\theta) \cdot \hat{e}_y)] = \\ &= -S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \cdot \hat{e}_n \cdot \hat{\mu}_\rho = -S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k)] \cdot \hat{e}_n \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (5.17)$$

En este punto es muy importante tener claro qué ángulo tratamos en cada caso, que podemos clarificar en la figura 5.6.

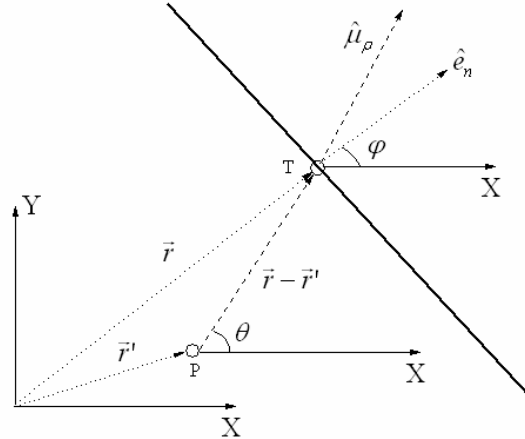


Figura 5.6 Relación de ángulos en la formulación cartesiana con transformada Sommerfeld

Observamos una pared oblicua de un tramo arbitrario de una estructura cualquiera, sobre el que hemos impuesto una condición de contorno, 'T'. La carga fuente está señalada como el punto 'P'. Vemos la definición de los vectores unitarios desarrollados en la formulación, así como la diferencia importante entre los dos ángulos tratados.

El cálculo de la otra ecuación definida en 5.15 es exactamente igual, sin más que sustituir \tilde{G}_A^{xx} por \tilde{G}_A^{yy} . De esta forma, ya tenemos todos los elementos para resolver el

sistema de ecuaciones que nos proporcionará los valores de los dipolos imagen, pudiendo reconstruir el potencial en el interior de cualquier estructura.

Finalmente, esta reconstrucción de los potenciales será llevada a cabo mediante la ecuación 5.13.

En este punto, el software implementado es capaz de analizar cavidades con estructura en principio arbitraria, tridimensionales (pues tienen en cuenta el eje 'z') y con "tapas" tanto superior e inferior.

Esto nos abre la puerta al análisis de una grandísima cantidad de estructuras cuyo análisis de potenciales no es posible de forma analítica. También al haber contemplado la posibilidad de usar dieléctricos desde el principio, el empleo de estos no conllevará ninguna modificación del software realizado.

En el capítulo siguiente mostraremos una gran cantidad de estructuras analizadas con este método, la distribución de sus potenciales, etc. En este apartado nos conformaremos con mostrar los resultados para la guía cuadrada, analizar su convergencia y validar los mismos mediante comparación con el método analítico mostrado en [10] y discutido anteriormente.

De este modo, vamos a analizar una guía cuadrada de dimensiones $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$, obteniendo sus potenciales para una frecuencia de 10 Ghz. La situación que estamos analizando cuando empleamos un total de 50 imágenes es la siguiente:

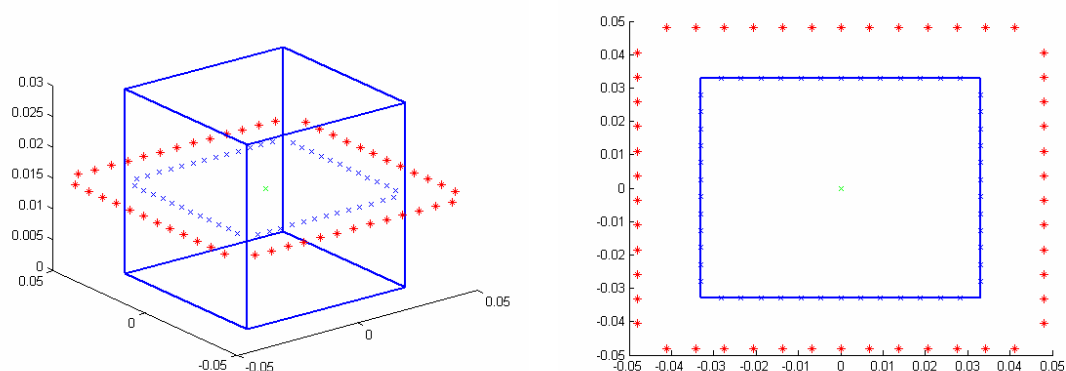
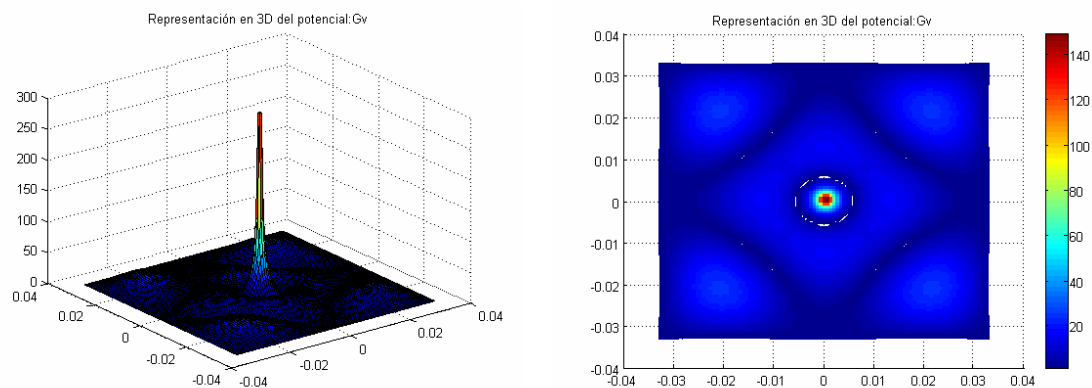


Figura 5.7 Situación al analizar una guía cuadrada $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$. 50 imágenes, situadas siguiendo su contorno situadas a 15 mm.

Podemos reconstruir los potenciales en su interior, obteniendo:



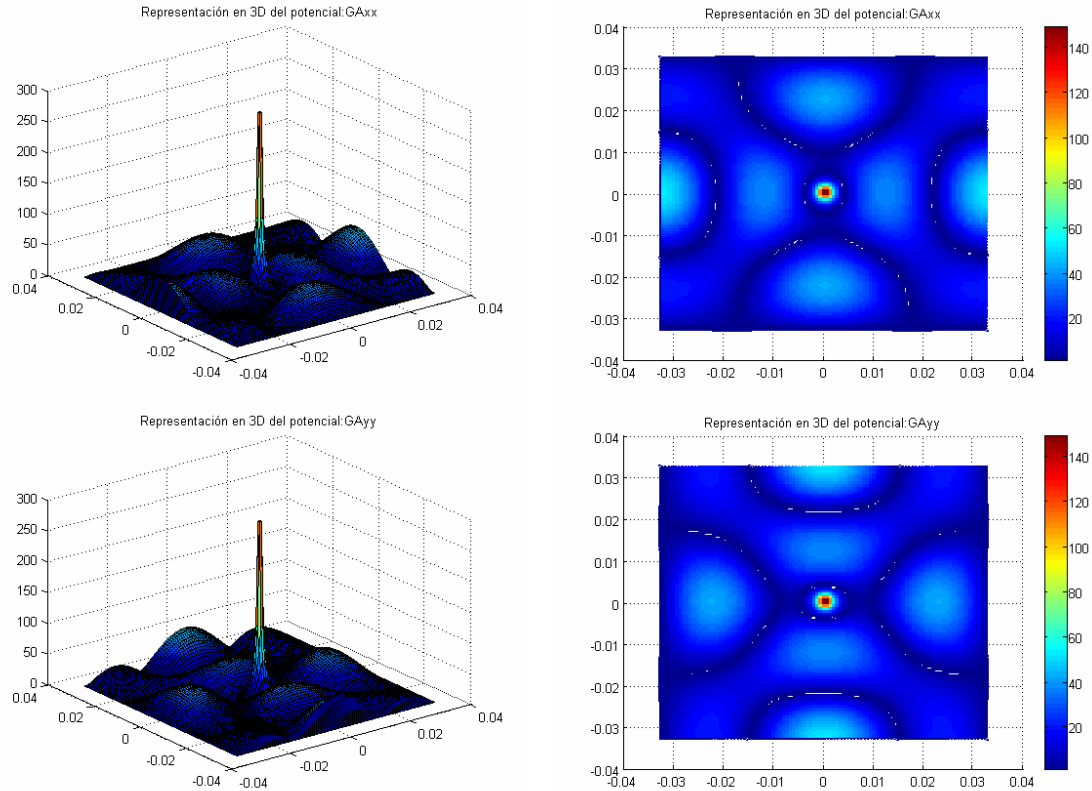


Figura 5.8 Potenciales en el interior de una guía cuadrada 66x66x30 mm. 50 imágenes, situadas siguiendo su contorno situadas a 15 mm.

Comprobamos como los resultados obtenidos son coherentes y cumplen las condiciones de contorno impuestas (variando las mismas en función del tipo de potencial analizado).

A continuación vamos a realizar un pequeño estudio acerca de la convergencia de los resultados en función de la posición de las imágenes empleadas (50), comparando simultáneamente los resultados con los proporcionados por el método descrito en [10]. Para ello, mostraremos cortes a la altura de la fuente (es decir 15 mm sobre 'z') en el eje X, a una distancia en el eje Y de 16.5 mm del borde inferior, como indica la figura:

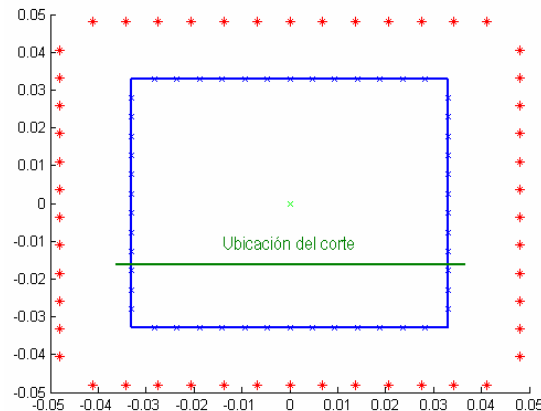


Figura 5.9 Ubicación del corte en el eje X en la guía cuadrada para la visualización de los potenciales

Las distintas separaciones de las imágenes respecto a la estructura están indicadas en la variable "separa", en función de la distancia en milímetros de las imágenes al lado del cuadrado que controlan. Los resultados son los siguientes:

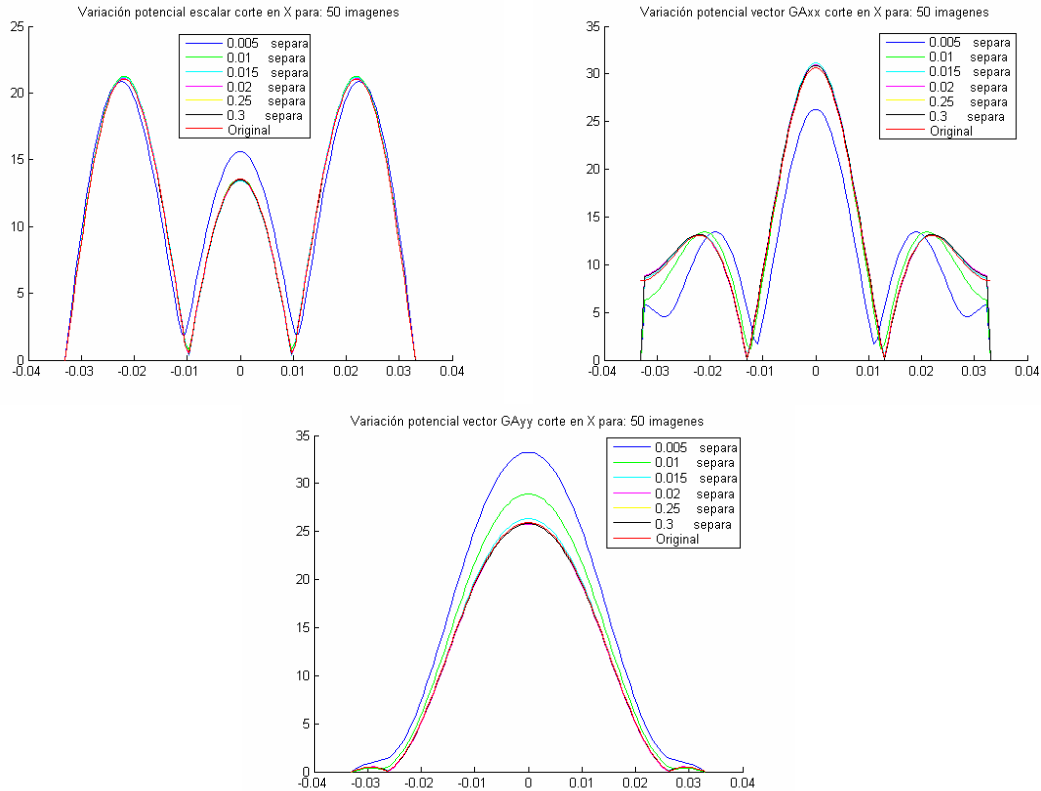


Figura 5.10 Comparación de los potenciales en una guía cuadrada de 66x66x30mm en un corte en el eje X a 16.5mm del eje Y, 50 imágenes, distintas posiciones de las mismas. Fuente en el centro. Se muestra el resultado analítico esperado según [10]. 10 Ghz.

Observamos en primer lugar los resultados analíticos del método descrito en [10], en línea roja. Comprobamos como al ubicar las cargas demasiado cerca de la estructura los resultados se alejan de los esperados (ejemplos de líneas azul y verde), mejorando de forma considerable conforme vamos alejando las imágenes de la estructura. Observamos como a una distancia de unos 15mm los resultados ya se pueden dar por satisfactorios. Por otro lado, comprobamos como la convergencia con el método analítico descrito en [10] se produce al alcanzar una ubicación de las imágenes adecuada. Finalmente, observamos como los resultados de las distintas posiciones tienden a converger hacia el mismo.

Situar las imágenes en una posición demasiado alejada de la estructura puede provocar problemas numéricos a la hora de resolver los sistemas de ecuaciones, debido a las aproximaciones numéricas de las integrales de Sommerfeld empleadas. Por ello observamos como existe un margen de ubicaciones de las imágenes en los que obtenemos un resultado totalmente válido de la estructura.

En los resultados mostrados hasta ahora hemos supuesto siempre que la fuente estaba situada en el centro de la guía cuadrada, y a una altura media. Vamos a mostrar un ejemplo en el que variaremos la ubicación de la fuente, situándola en una posición de (-10.7,0) mm en el plano X-Y resultante de observar desde arriba la guía cuadrada, tal y como observamos en la figura siguiente:

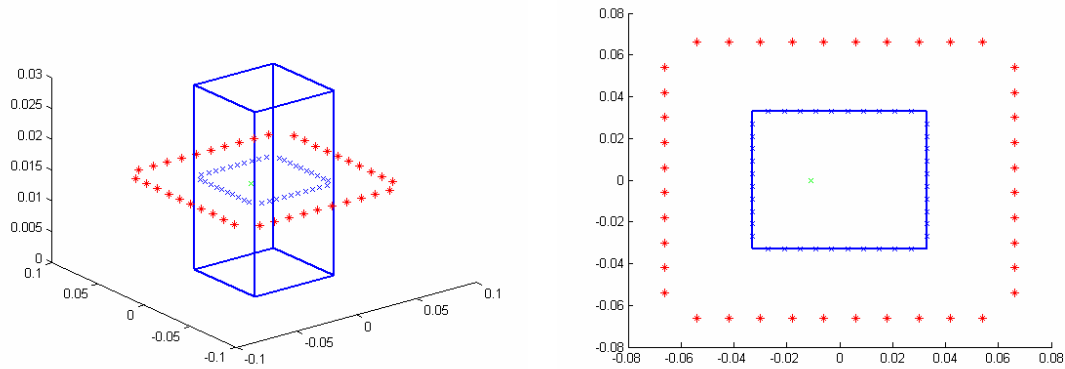


Figura 5.11 Situación a analizar: guía cuadrada 66x66x30mm, 40 imágenes ubicadas a 33mm del contorno. Fuente descentrada, situada en (-10.7,0)mm del plano X-Y.

Realizaremos un análisis a 4Ghz, para verificar como el método funciona a distintas frecuencias. Mostraremos nuevamente el corte a 16.5mm tal y como mostró la figura 5.8, comparando los resultados con los analíticos proporcionados por [10]. Ubicaremos 40 imágenes a una separación 33mm (la mitad del lado de cuadrado), observando como la convergencia es total:

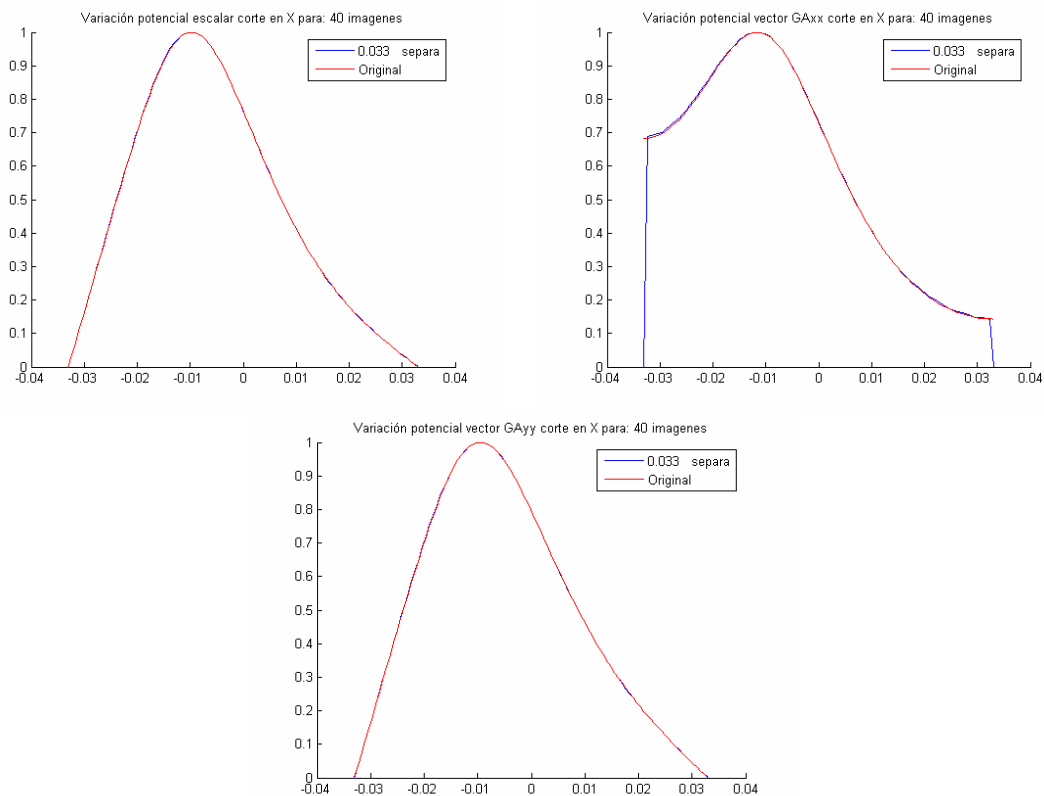


Figura 5.12 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30mm en un corte en el eje X a 16.5mm del eje Y, 40 imágenes, ubicadas a 33mm del contorno. Fuente en el centro. Se muestra el resultado analítico esperado según [10]. 4 Ghz.

Tras mostrar como el método funciona correctamente, veamos como una incorrecta ubicación de las imágenes puede ocasionar que los resultados no sean válidos. Para ello vamos a partir de la situación con fuente descentrada, ubicando las imágenes de forma proporcional a la posición de la fuente y muy distantes, tal y como muestra la figura siguiente:

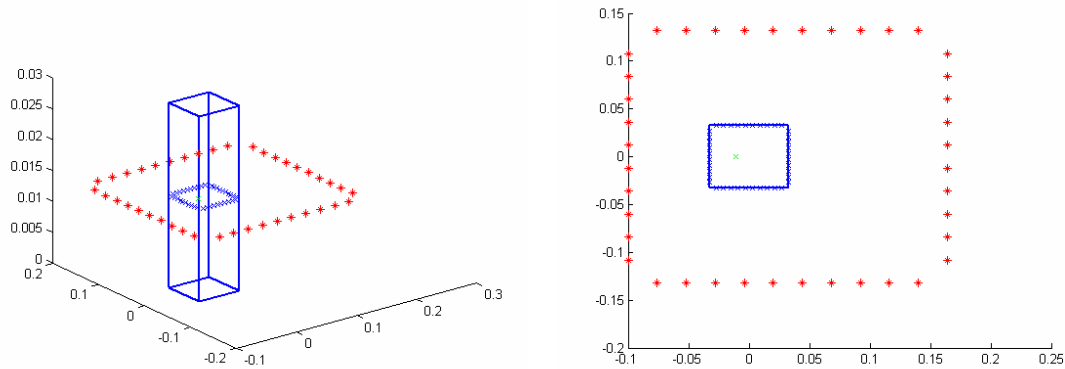


Figura 5.13 Ubicación de imágenes 40 imágenes alrededor de una guía cuadrada 66x66x30mm en función aumentada de su distancia a la fuente (descentrada)

El análisis lo realizaremos empleando un total de 40 imágenes, a una frecuencia de 4Ghz y lo compararemos con los resultados esperados según [10]:

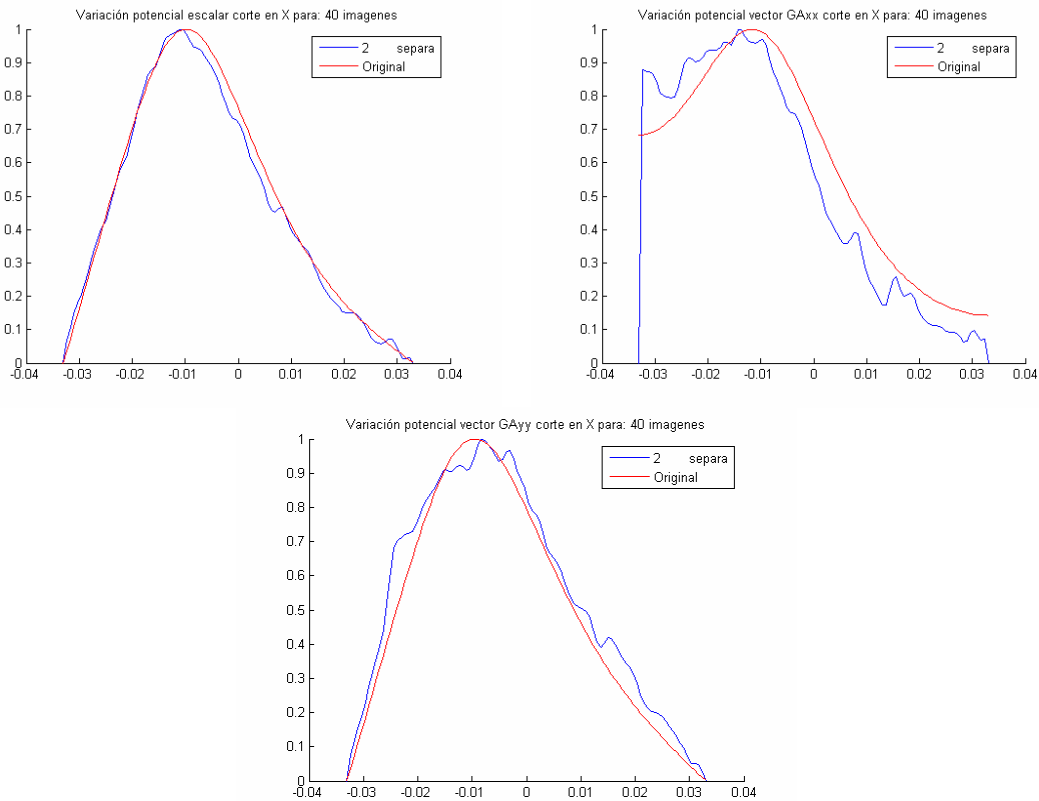


Figura 5.14 Representación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear 40 imágenes situadas en función aumentada de su distancia a la fuente ponderada. 4 Ghz.

Comprobamos como los valores de los potenciales en el corte no son los adecuados, a pesar de que siguen la misma “silueta”. Esto ha sido debido a la colocación incorrecta de las imágenes, demasiado lejos de la estructura, provocando problemas numéricos en la resolución del sistema de ecuaciones al emplear la transformada Sommerfeld.

Otra comparación interesante que se puede realizar es variando el número de imágenes, para conocer a partir de que cuantas imágenes empleadas los resultados convergen con los analíticos descritos en [10]. Para ello vamos a continuar con el análisis de la guía cuadrada de $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$, empleando una frecuencia de 10Ghz y haciendo un barrido con el número de imágenes empleadas, variando la mismas entre 10, 15, 20, 30, 40 y 50. Mostraremos los potenciales en un corte de la guía, estando la fuente centrada:

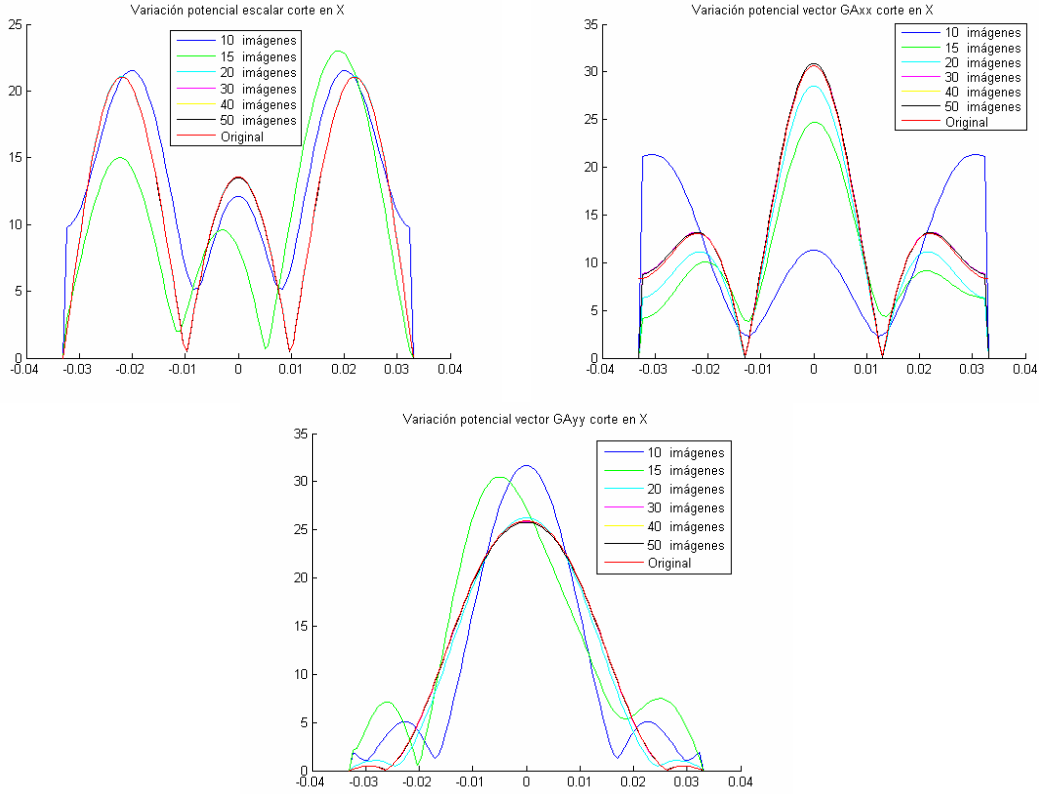


Figura 5.15 Comparación de los potenciales en un corte de una guía cuadrada de $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$ en función del número de imágenes empleadas, situadas a 33mm de la guía. 10 Ghz.

Las gráficas de la figura 5.15 muestran como conforme va aumentando el número de imágenes obtenemos una convergencia total entre sus propios resultados y los proporcionados por los analíticos. Vemos como con 20 imágenes la convergencia es total en los potenciales, con unas pequeñas diferencias en el GA_{xx} . Con un número superior de imágenes, siempre obtenemos el mismo resultado en los cortes en todos los potenciales, coincidiendo además con los resultados analíticos.

Para terminar este apartado indicaremos que las estructuras que hemos analizado hasta ahora son eléctricamente pequeñas. Hemos empleado frecuencias de cómo mucho 10 Ghz, mientras que la guía cuadrada analizada presentaba una altura total de 30mm.

Así:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 0.03 \text{ m} \rightarrow \text{Relacion} = \frac{\text{Altura}}{\lambda} = \frac{0.03}{0.03} = 1 \quad (5.18)$$

Vemos como el “anillo” de imágenes controla en total una altura de $\lambda/2$ en su parte superior y otra igual en su parte inferior, obteniendo unos resultados correctos. No obstante, si aumentamos la frecuencia de forma importante, por ejemplo hasta los 15

Ghz, este único “anillo” de imágenes no será suficiente para imponer las condiciones de contorno a lo largo de toda la estructura. Un ejemplo de este caso lo tenemos al analizar la guía cuadrada tratada hasta ahora con 40 imágenes y una fuente situada en el centro de la guía. Emplearemos distintas ubicaciones de las imágenes, en función de su distancia en milímetros al lado de la guía:

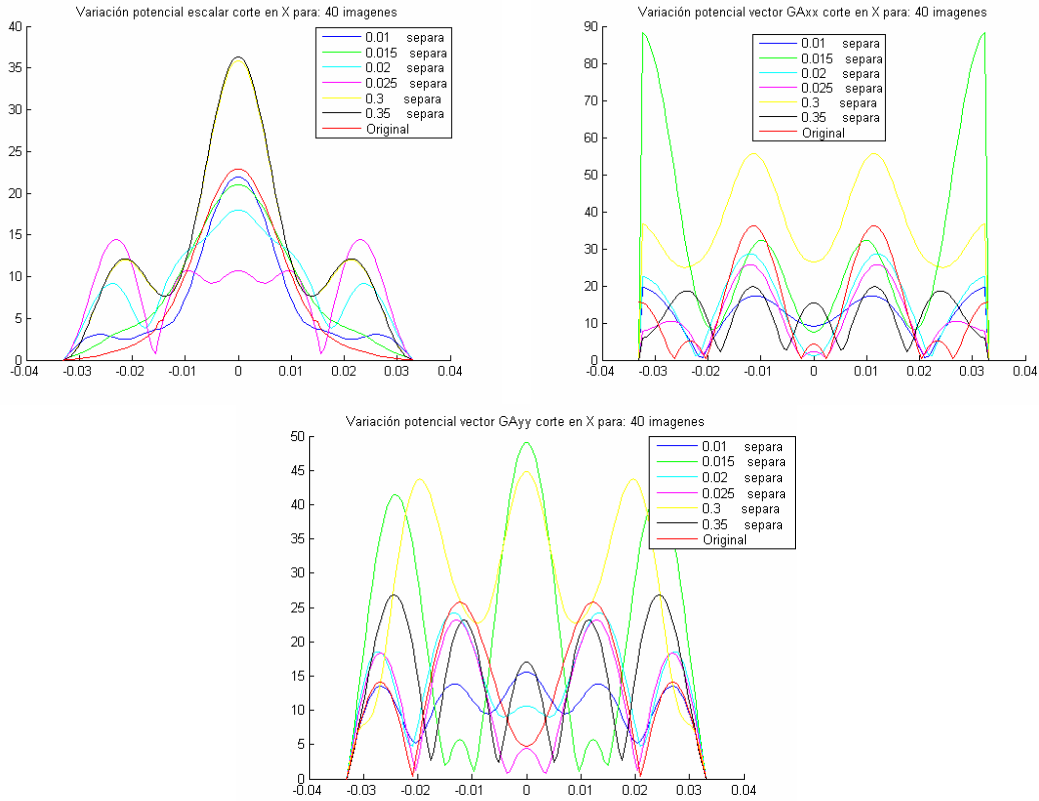


Figura 5.16 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear un anillo de 40 imágenes variando su distancia a la guía, con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.

Observamos como los resultados obtenidos no son válidos: no conseguimos una representación de los potenciales igual a los descritos de forma teórica en [10] y ni siquiera hemos encontrado una convergencia con las distintas separaciones. Esto es debido a que la frecuencia es enorme, de tal forma que el anillo de imágenes impuesto debe de controlar una altura eléctrica demasiado grande:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^9} = 0.02m \rightarrow Relacion = \frac{Altura}{\lambda} = \frac{0.03}{0.02} = \frac{3}{2} \quad (5.19)$$

La única solución para este caso sería situando más de un anillo a lo largo de la altura de la estructura, de tal forma que la envolviera completamente y se satisficieran las condiciones de contorno en toda la cavidad. Así introducimos la formulación “multianillo” que presentamos en el apartado siguiente.

5.3 Análisis de cavidades eléctricamente largas: Multianillo

Hasta ahora, hemos estudiado cavidades circulares y arbitrarias empleando para ello un único “anillo” de imágenes a su alrededor, situado a la altura en la que se encontraba la fuente en el interior e imponiendo las condiciones de contorno a esa altura alrededor de la estructura.

Sin embargo, cuando la altura eléctrica de esta cavidad aumenta, el empleo de un único “anillo” imponiendo condiciones de contorno en puntos discretos de la cavidad a una única altura se muestra ineficiente, como lo muestran los resultados de la figura 5.16.

En este apartado se propone el empleo de más de un “anillo” de imágenes, situando cada uno de ellos a una altura diferente; de esta forma impondremos condiciones de contorno para los potenciales en puntos discretos de la estructura a diferentes alturas, permitiendo el análisis de cavidades eléctricamente largas.

Al emplear esta técnica, tendremos un número muy superior de imágenes que las empleadas hasta la fecha debiendo de interaccionar todas con todas, así como con la fuente y con todos los puntos de contorno tangentes a la estructura (situados a lo largo de la misma en el plano X-Y y a diferentes alturas).

Un ejemplo de la situación que estamos planteando para el caso de una guía cuadrada es la siguiente:

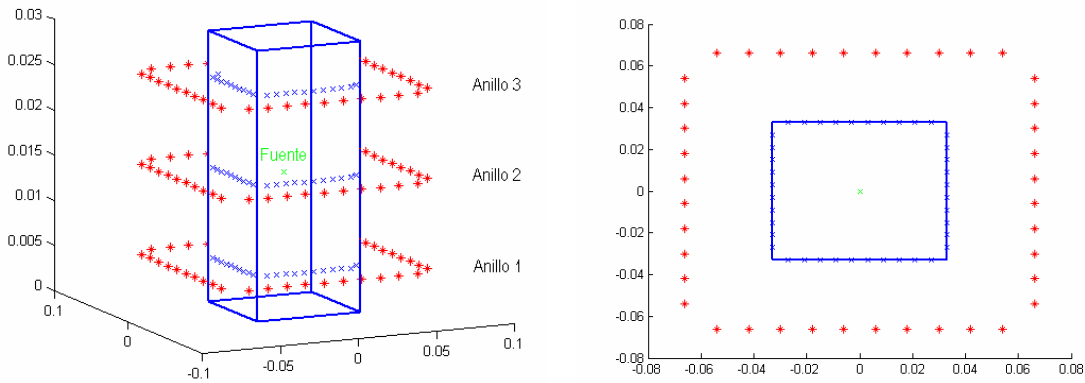


Figura 5.17 Situación planteada al analizar con 3 anillos una guía cuadrada

Comprobamos como los anillos se han distribuido de tal forma que engloban a toda la estructura de la guía cuadrada. La forma de ubicar las imágenes en el plano X-Y no varía, pudiéndose emplear cualquiera de las técnicas presentadas hasta el momento.

En este punto, con la distribución de las imágenes por anillos, vamos a “rehacer” la formulación empleada, con el fin de tener en cuenta las interacciones entre todas las imágenes y puntos de contorno. Debido a las múltiples semejanzas que presentan la formulación en coordenadas cilíndricas y en cartesianas, realizaremos el estudio de forma genérica, señalando las diferencias en cada caso cuando sea necesario.

En primer lugar, es muy importante especificar cada distancia a que equivale:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{r}_{a,b} \rightarrow 'a': \text{Número de capa} & 'b': \text{Número de punto tangente de esa capa} \\ \vec{r}'_{a,b} \rightarrow 'a': \text{Número de capa} & 'b': \text{Número de imagen esa capa} \end{array} \right.$$

Así, la forma a la que nos referiremos a cada imagen y a cada punto tangente será como la que se indica en la figura 5.18:

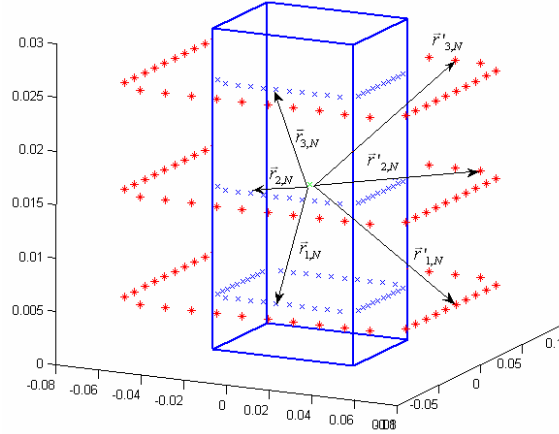


Figura 5.18 Nomenclatura usada para la ubicación de imágenes y puntos tangentes en análisis multianillo

Supongamos un caso genérico, formado por M “anillos” que se distribuyen en altura para envolver a una cavidad cualquiera, teniendo cada uno de los “anillos” un total de N imágenes. De esta forma, tenemos un total de $M \cdot N$ puntos de contorno distribuidos a lo largo de la estructura e igual número de imágenes.

Nos referiremos a cada imagen de la misma forma que a la distancia, mediante dos subíndices. El primero de ellos hará referencia al número de anillo mientras que el segundo indicará el número de imagen perteneciente a ese anillo.

El potencial escalar, definido de la misma forma para la formulación en cilíndricas y en cartesianas, se puede redefinir teniendo en cuenta los múltiples anillos como:

$$\sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N q_{p,k} S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r})(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k})] = -S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_o')] \quad (5.20)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N; j = 1, 2 \dots M$

Donde ‘i’ hace referencia al número de imágenes por anillo y ‘j’ al número de anillos.

Así obtenemos un sistema de ecuaciones de orden $M \cdot N \times M \cdot N$ cuya resolución nos dará el valor complejo de las $M \cdot N$ cargas que rodean a la estructura a analizar, satisfaciéndose las condiciones de contorno en los $M \cdot N$ puntos discretos impuestos sobre la cavidad.

Vemos como no hemos hecho ninguna condición acerca de la longitud eléctrica de la cavidad; en función de la misma emplearemos un número de “anillos” u otro, de tal forma que cada “anillo” controle una parte manejable de la misma.

Finalmente, obtenemos el potencial escalar en el interior de la cavidad mediante:

$$G_{v_{cy}}(\vec{r}) = S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r}, \vec{r}_o')] + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N q_k \cdot S_0 [\tilde{G}_v(\vec{r}, \vec{r}_{p,k})] \quad (5.21)$$

Estos potenciales los hemos obtenido en un plano X-Y de la estructura, pudiendo situarse el mismo a cualquier altura sin más que definir la misma en la cavidad. Salvo que se indique lo contrario mostraremos los resultados a la altura en la que se encuentra la fuente.

En cuanto al potencial vector, la reformulación que conlleva el empleo de múltiples anillos es similar a la realizada para el potencial escalar, teniendo en cuenta la presencia de los distintos anillos y de las imágenes pertenecientes a cada uno de ellos:

$$\begin{aligned}
 & -\sin(\varphi) \cdot \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N S_0 [\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k})] \cdot I_{p,k}^x + \cos(\varphi) \cdot \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N S_0 [\tilde{G}_A^{yx}(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k})] \cdot I_{p,k}^y = \sin(\varphi) \cdot S_0 [\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_0)] \\
 & \cos(\varphi) \cdot \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N C_{(j,i),(p,k)}^x \cdot I_{p,k}^x + \sin(\varphi) \cdot \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N C_{(j,i),(p,k)}^y \cdot I_{p,k}^y = -\cos(\varphi) \cdot C_{(j,i),0}^y \\
 & i = 1, 2, 3 \dots N; j = 1, 2 \dots M
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

La fórmula anterior es válida tanto para la formulación en cilíndricas como en cartesianas, salvo la definición de las constantes $\tilde{C}_{(j,i),(p,k)}^x$, que en cada caso son:

1) Formulación en coordenadas cilíndricas:

$$\tilde{C}_{(j,i),(p,k)}^x = \frac{S_0(\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k}))}{\rho} - \hat{e}_p \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot S_1(\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k})) \tag{5.23}$$

2) Formulación en coordenadas cartesianas:

$$C_{(j,i),(p,k)}^x = -S_1[\tilde{A}_x(\vec{r}_{j,i}, \vec{r}_{p,k})] \cdot \hat{e}_n \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.24}$$

La formulación de las constantes en ‘y’ es la misma, sin más que sustituir las funciones de Green orientadas según el eje ‘x’ anteriores por otras orientadas según el eje ‘y’. Al igual que en el caso anterior, hemos considerado que el dipolo fuente se encuentra orientado a lo largo del eje ‘x’; si estuviera en el eje ‘y’ la formulación es totalmente dual.

De esta forma, obtenemos un sistema de ecuaciones para las dos formulaciones, de dimensión $2 \cdot M \cdot N \times 2 \cdot M \cdot N$, cuya solución nos proporcionará los valores complejos de los dipolos imagen situados en cada anillo ($2 \cdot N$ en cada anillo, ‘N’ dipolos orientados a lo largo del eje ‘x’ y ‘N’ dipolos orientados a lo largo del eje ‘y’).

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, con un coste computacional cada vez mayor debido al orden del mismo, podremos recomponer los potenciales en el interior de la estructura que estemos analizando mediante:

$$\begin{aligned}
 G_{Acy}^{xx}(\vec{r}) &= S_0[\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_0)] + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N I_{p,k}^x \cdot S_0[\tilde{G}_A^{xx}(\vec{r}, \vec{r}_{p,k})] \\
 G_{Acy}^{yx}(\vec{r}) &= \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^N I_{p,k}^y \cdot S_0[\tilde{G}_A^{yx}(\vec{r}, \vec{r}_{p,k})]
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

En este punto ya podemos analizar cavidades de altura eléctricamente grande; mostraremos en primer lugar el ejemplo del apartado anterior de la guía cuadrada de dimensiones $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$ a una frecuencia de 15 Ghz. Esta configuración no era posible analizarla con un único anillo, pues sus puntos de contorno deberían de aguantar una longitud eléctrica en el eje ‘z’ de 0.5λ por arriba y por abajo del anillo. En este caso, emplearemos un total de 3 anillos para analizar esta situación, ubicando las imágenes de los mismos en las mismas posiciones que en el caso anterior.

En la figura 5.19 observamos como obtenemos una convergencia total con los resultados analíticos proporcionados en [10]; igualmente apreciamos como todos los potenciales convergen entre si, incluyendo las situaciones en las que las imágenes están muy alejadas de la cavidad (0.35 metros frente a una cavidad de 66x66 milímetros).

Cabe destacar que el coste computacional en este caso es superior al del resto; ello es debido a la necesidad de obtener las transformadas de Sommerfeld de una cavidad en la que se han definido varias capas en su interior y al aumento del orden del sistema de ecuaciones creado.

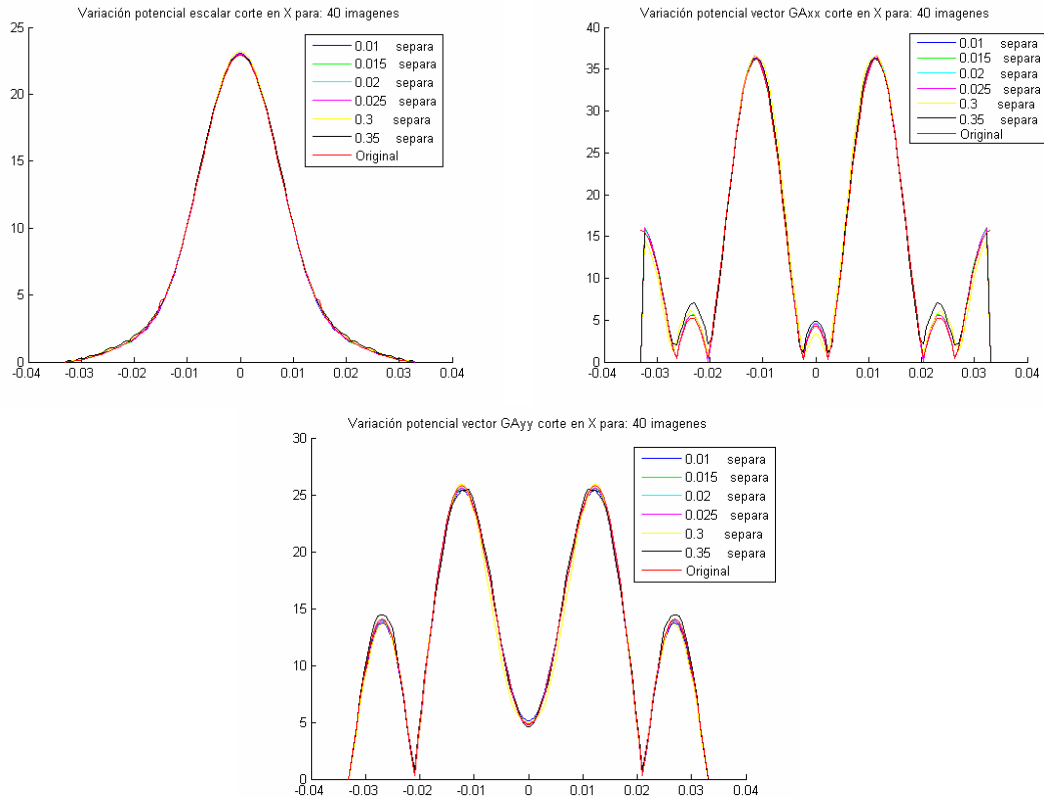


Figura 5.19 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte, al emplear tres anillos de 40 imágenes cada uno, variando su distancia a la guía, con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.

Hasta ahora hemos mostrado siempre cortes de los potenciales calculados a la altura en la que se encontraba la fuente; vamos a mostrar para esta misma configuración (guía cuadrada de 66x66x30mm y a 15Ghz) como obtenemos unos resultados totalmente concordantes con los resultados analíticos de [10] si realizamos la medida a otra altura, por ejemplo 20mm (manteniendo el corte en el eje X a 16.5 mm del eje Y, tal y como mostramos en la figura 5.8).

La forma de definir esta situación ha sido añadiendo una “capa” más en la definición de la cavidad (que no un nuevo anillo), a la altura donde realizaremos la medida. Así, obtenemos un resultado de:

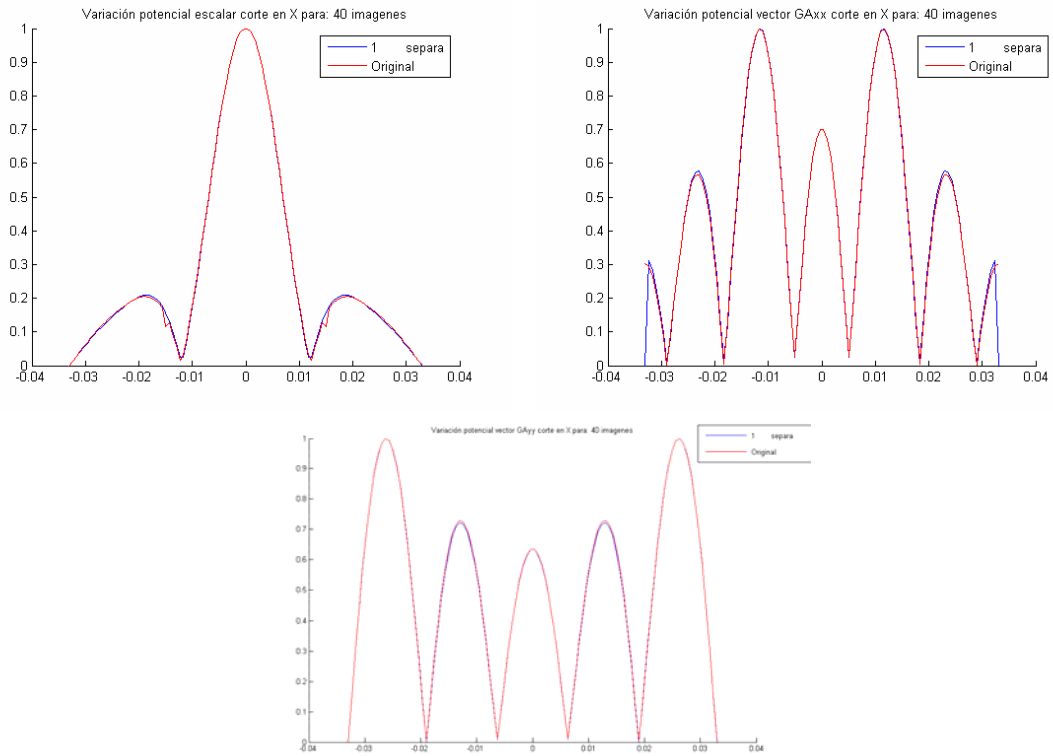
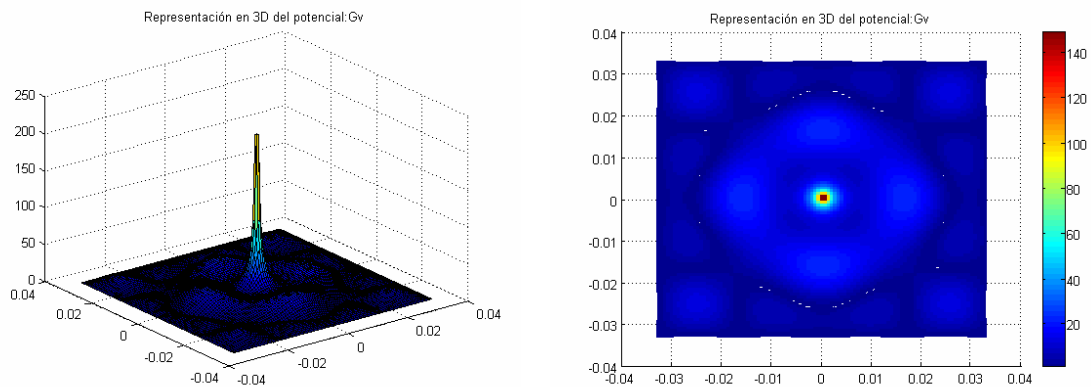


Figura 5.20 Comparación de los potenciales de una guía cuadrada 66x66x30 en un corte distinto a la altura de la fuente, al emplear tres anillos de 40 imágenes cada uno situados a 33mm de la cavidad, con el resultado analítico de [10]. 15 Ghz.

Vemos como los resultados siguen coincidiendo de forma total con los analíticos descritos en [10], lo que nos proporciona una validación del método programado.

Finalmente, vamos a mostrar la distribución de los potenciales a media altura de la guía, en su plano X-Y para el mismo caso que hemos estado analizando hasta ahora y que hemos validado: una guía cuadrada de 66x66x30mm con la fuente centrada:



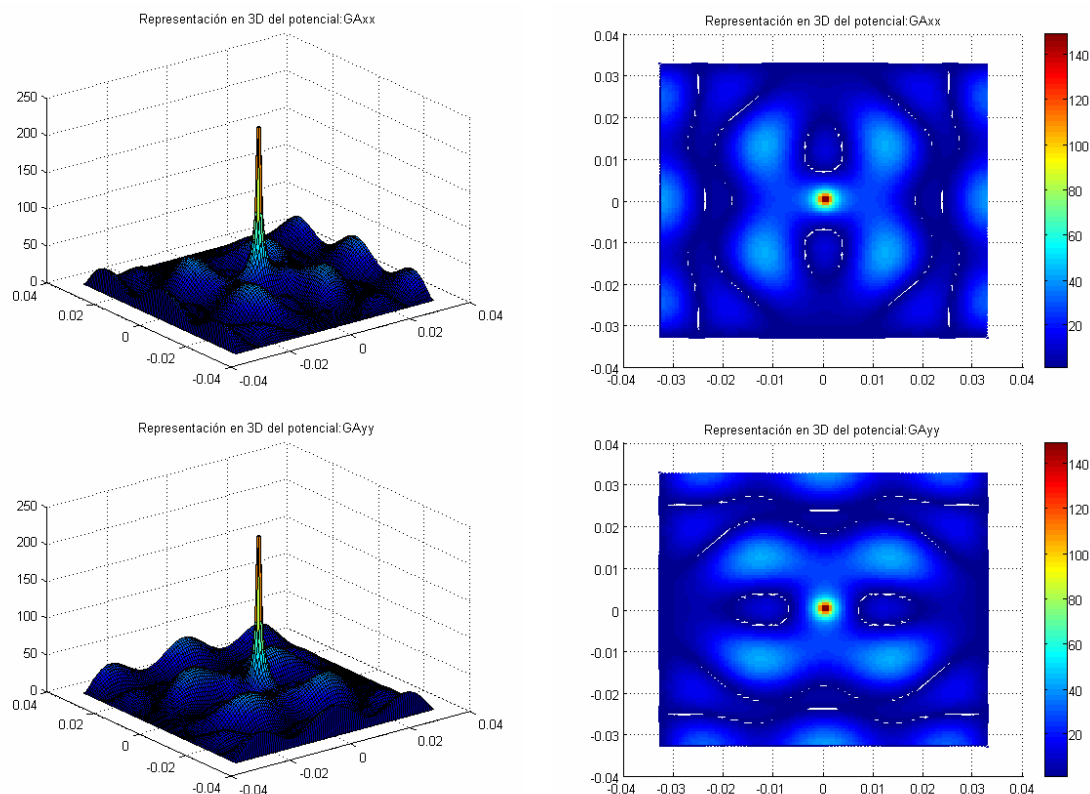


Figura 5.21 Potenciales a media altura de una guía cuadrada de 66x66x30mm, 3 anillos de 50 imágenes cada uno, ubicados a 33mm de la cavidad. Frecuencia de 15Ghz.

En la gráfica anterior, realizando un análisis detallado, podemos comprobar como se cumplen las condiciones de contorno impuestas en los bordes de la guía cuadrada, así como ha aumentado el número de oscilaciones en su interior debido al aumento de la frecuencia. Los resultados son válidos.

Hemos empleado en los casos anteriores 3 anillos para obtener unos resultados adecuados, no obstante resulta interesante saber que longitud eléctrica en el eje 'z' es capaz de controlar un único anillo para poder realizar una distribución adecuada de los mismos.

Tras realizar numerosas pruebas empíricas para dar con este valor, se ha determinado que un anillo es capaz de controlar con resultados válidos una longitud eléctrica de λ , soportando 0.5λ tanto en su parte superior como inferior.

No obstante, este valor puede cambiar debido a diversas causas: empleo de estructuras más complejas, búsqueda de resultados más precisos, etc. Además, este ha sido el valor encontrado para una guía cuadrada, por lo que en otro tipos de guías puede ser diferente.

Se ha decidido dejar este parámetro, de la longitud eléctrica en términos de λ como modificable por el usuario; de esta manera el software reconocerá automáticamente la estructura que estamos analizando y su altura eléctrica, introduciendo el número de anillos que considere oportuno.

Comentar también que la introducción de anillos no implica ninguna pérdida de generalidad, pudiéndose aplicar a cualquier tipo de estructura (como mostraremos más detenidamente en el capítulo siguiente). Hemos empleado hasta ahora una guía cuadrada debido a que era la única de la que podíamos disponer de datos de validación, con el fin de comprobar que el método propuesto funcionaba de forma correcta, tal y como así ha resultado.

5.4 Problemas de convergencia

Hasta este punto hemos extendido la teoría de las imágenes a cavidades arbitrarias tridimensionales, empleando para ello la transformada de Sommerfeld; la validación del método la hemos realizado con una guía cuadrada comparando los resultados con los proporcionados por el método analítico propuesto en [10].

La convergencia del método para la guía cuadrada es muy rápida, sin afectar demasiado el número de imágenes empleadas (a partir de un mínimo) y la posición relativa de las mismas.

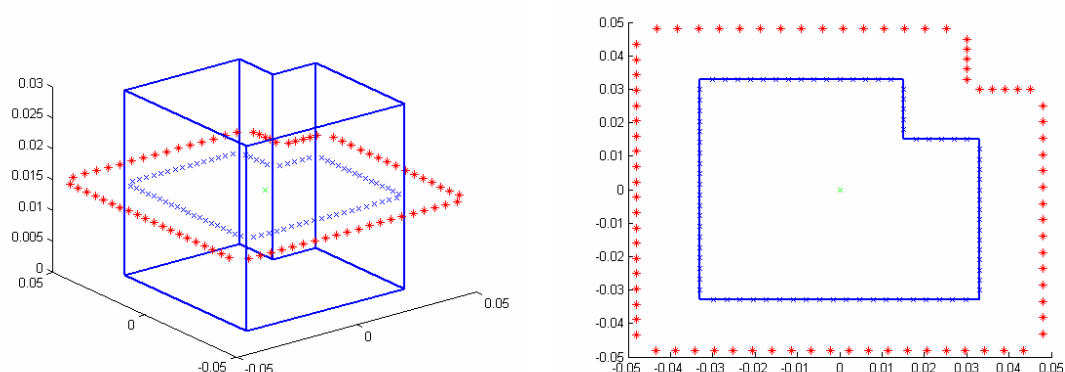
No obstante, a la hora de analizar estructuras más complejas pueden darse algunos problemas para encontrar esta convergencia. Los principales problemas se han encontrado al introducir “entrantes” pronunciados en las guías (como por ejemplo un corte cuadrado en la guía cuadrada) o al emplear tramos oblicuos con ángulos entre sí muy cerrados (por ejemplo una guía rombo con dos de sus ángulos interiores muy pequeños).

En este apartado vamos a plantear un estudio de algunos de los casos en los que hemos encontrado problemas de convergencia, tratando de acotar los mismos y conseguir los resultados más satisfactorios. Otras muchas situaciones son analizadas sin problemas y no necesitan una atención especial.

Concretamente vamos a presentar dos casos: el estudio de guía “dual” formada con una guía cuadrada al que se le hace un corte cuadrado en su esquina superior y el estudio de una guía rombo, en función de los ángulos interiores de la misma.

5.4.1 Guía dual formada por guía cuadrada con corte en una esquina

Para el primer caso, vamos a plantear el problema de convergencia en una guía cuadrada de medidas $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$ al que le hacemos un “corte” cuadrado en su esquina superior derecha de $18 \times 18 \text{ mm}$. Vamos a realizar un primer análisis sobre esta estructura, variando la distancia de ubicación de las 80 imágenes que situaremos en un único anillo, empleando una frecuencia de 10GHz y mostrando los cortes en el eje X a una distancia de 16.5mm del eje Y, a la altura de la fuente:



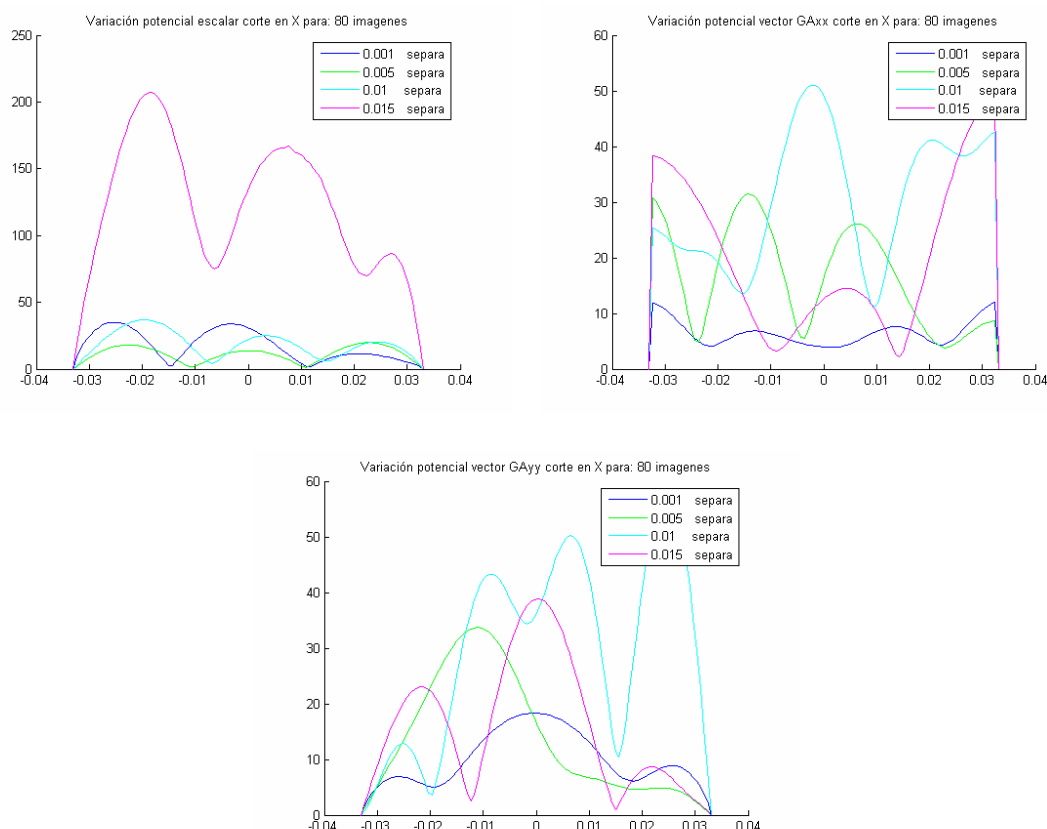


Figura 5.22 Comparación de los potenciales en un corte del eje X, en una guía cuadrada de 66x66x30 con un corte cuadrado en su esquina superior derecha de 18x18mm. 80 imágenes. 10Ghz.

Observamos como los resultados no son nada satisfactorios: ninguna de las distintas ubicaciones de las imágenes ha sido convergente con las demás. Ello es debido al “entrante” en la estructura, y a la dificultad de ubicar las imágenes de tal forma que las condiciones de contorno impuestas representen de forma adecuada a la estructura.

Se realizaron una gran cantidad de pruebas con el fin de corregir este problema: distribución de las imágenes de forma circular, distribución pegada a la cavidad o muy separada, e incluso un aumento puntual de las imágenes en la zona con entrante con el fin de evitar cualquier problema producido en esa zona. Ninguno de los métodos anteriormente propuestos ha dado el resultado esperado.

Una de las posibles causas de esta falta de convergencia puede ser debida a que la altura eléctrica que estamos dominando con un único anillo es muy grande; para tratar de obtener una convergencia, disminuirémos la frecuencia de 10 Ghz a 1Ghz y realizaremos un estudio similar al anterior (variando la distancia de ubicación de imágenes) empleando 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes cada uno. De esta forma tratamos de averiguar a que distancia de la cavidad deberemos de ubicar las imágenes para obtener un resultado óptimo.

La situación que estamos analizando con un único anillo es la expuesta en el ejemplo anterior, al emplear 3 y 5 anillos la distribución de los mismos es la siguiente:

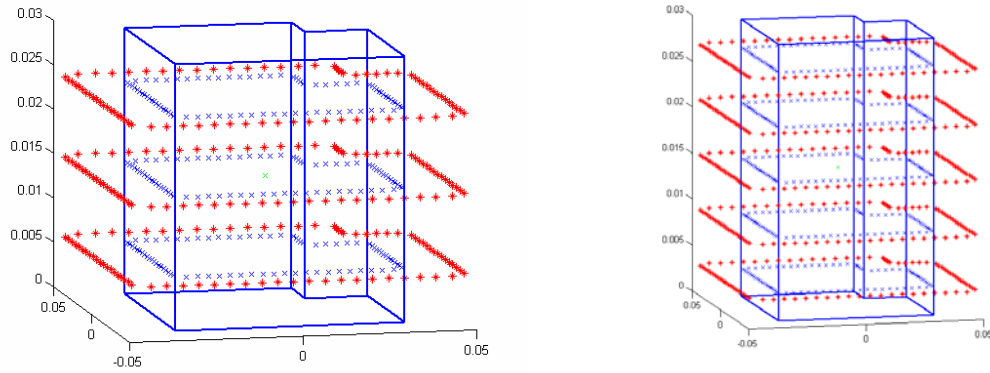


Figura 5.23 Ubicación de 3 y 5 anillos de 80 imágenes alrededor de una guía cuadrada de 66x66x30 mm que presenta un corte de 18x18mm en su esquina superior derecha.

En la siguiente figura se muestra los resultados de los cortes del potencial escalar en función de la ubicación de las imágenes, para 1,3 y 5 anillos:

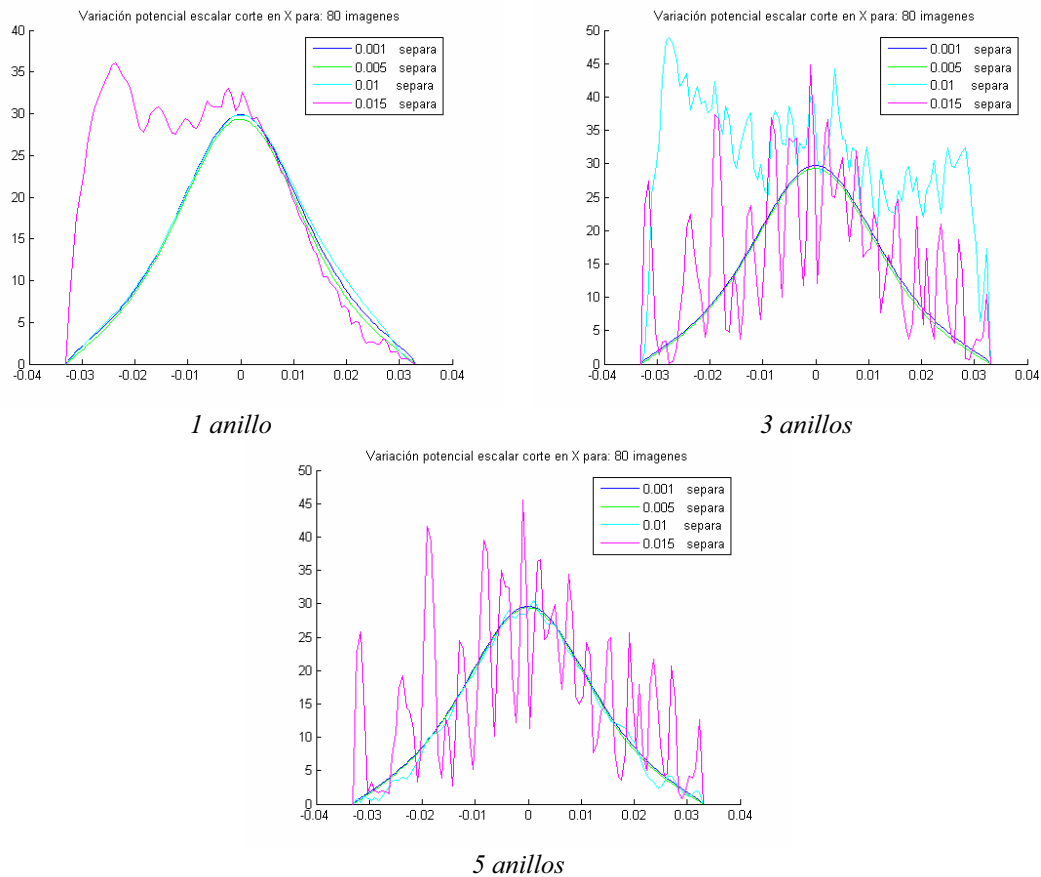


Figura 5.24 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

Comprobamos como los resultados tienden a converger, gracias al haber empleado una frecuencia más reducida. Observamos no obstante que para el caso de emplear 3 anillos la distancia de 10mm de las imágenes a la cavidad es demasiado alta, volviéndose el resultado inestable.

Un estudio de las mismas características para el potencial vector lo podemos encontrar en la figura 5.25:

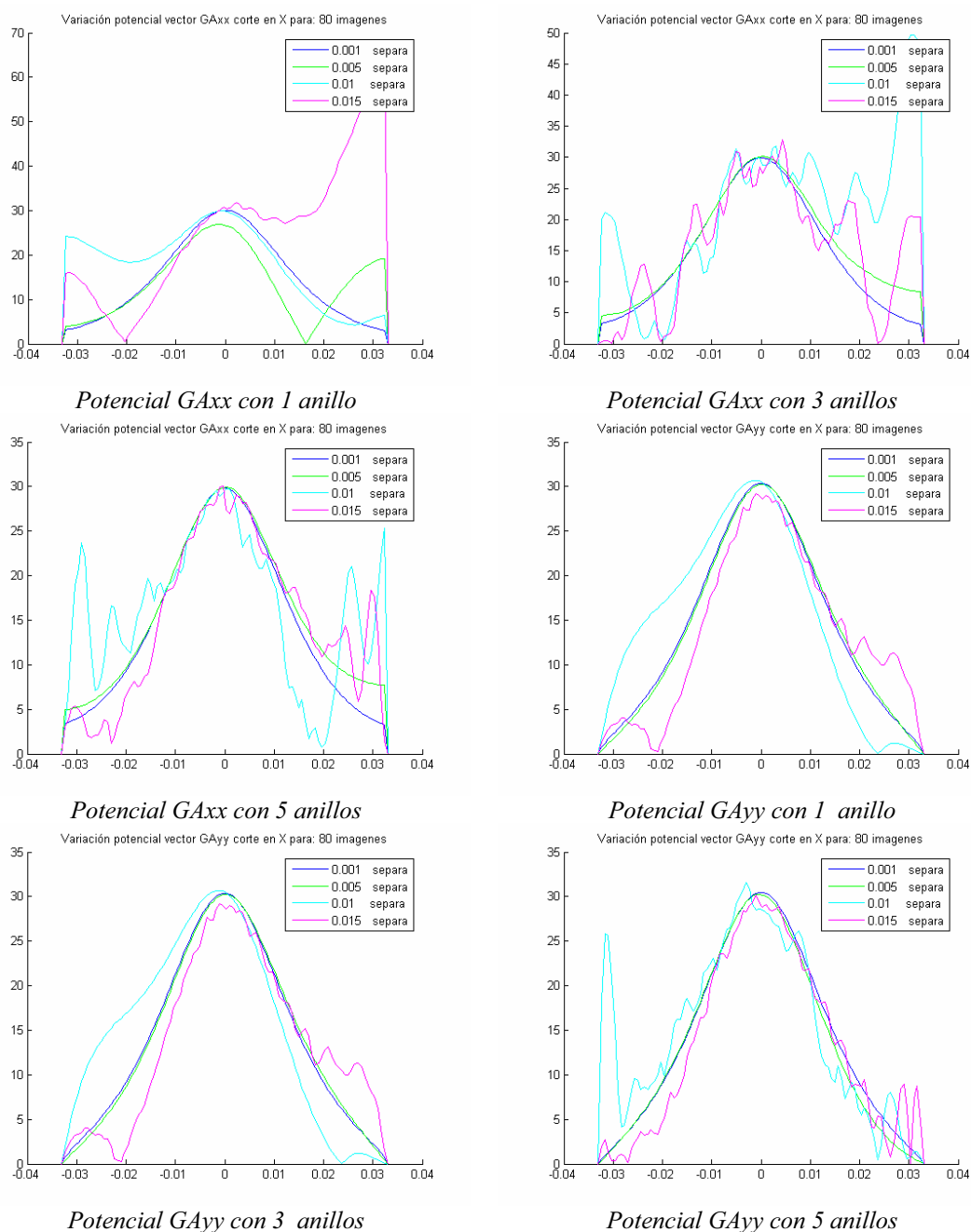


Figura 5.25 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia de los mismos a la cavidad dual cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

Observamos como las diferencias apreciadas en el potencial vector son más significativas que en el potencial escalar, sin conseguir obtener resultados satisfactorios al emplear un único anillo. Al situar varios anillos (3 y 5) los resultados tienden a convergen, excepto cuando situamos imágenes muy alejadas de la cavidad. La explicación de este fenómeno es debida a que para poder imponer los puntos de contorno en el interior del “entrante” de forma adecuada, las imágenes deben de situarse en su interior, marcando una diferencia clara entre las imágenes que “controlan” el entrante y las que “controlan” el resto de la estructura.

Vamos a realizar un segundo estudio de la posición de las imágenes respecto a la cavidad, realizando el barrido de las mismas entre 0.001,0.003,0.005,0.007 mm de la

cavidad. Así esperamos encontrar una zona convergente de ubicación de las imágenes, con el fin de poder analizar los potenciales en el interior de la guía.

Para el potencial escalar, empleando 1,3 y 5 anillos, obtenemos unos resultados de:

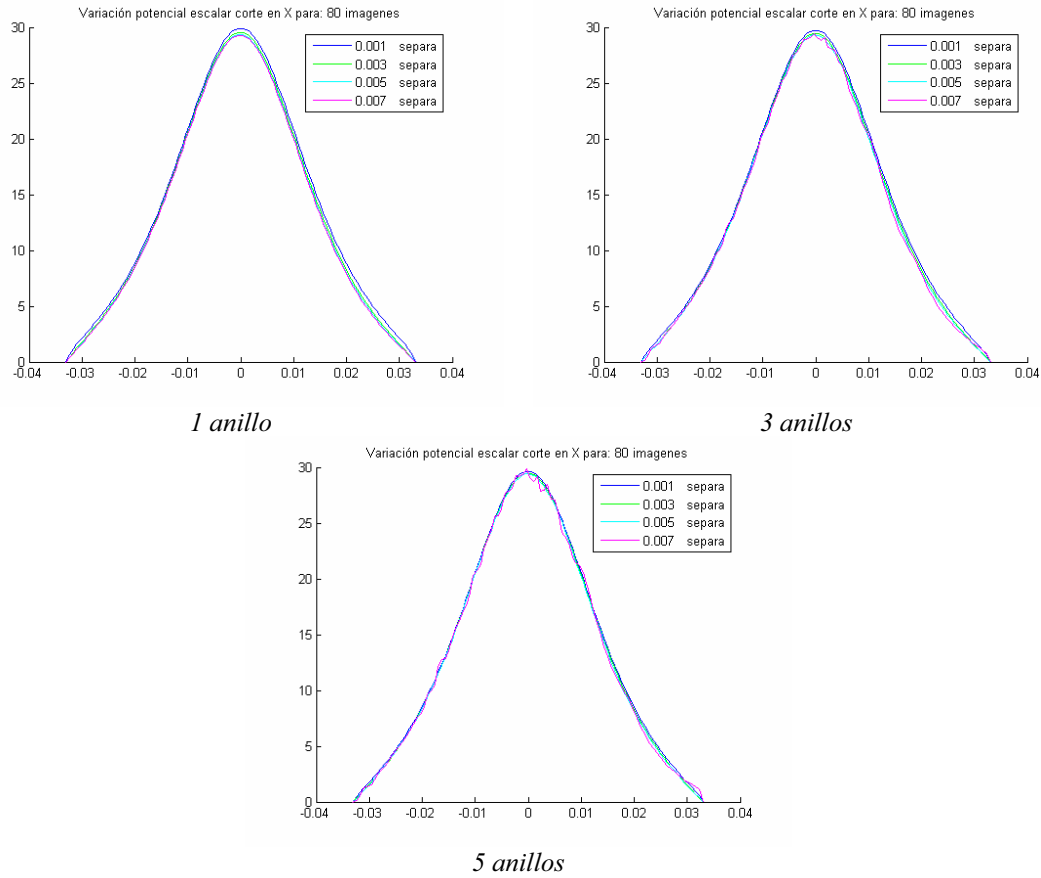
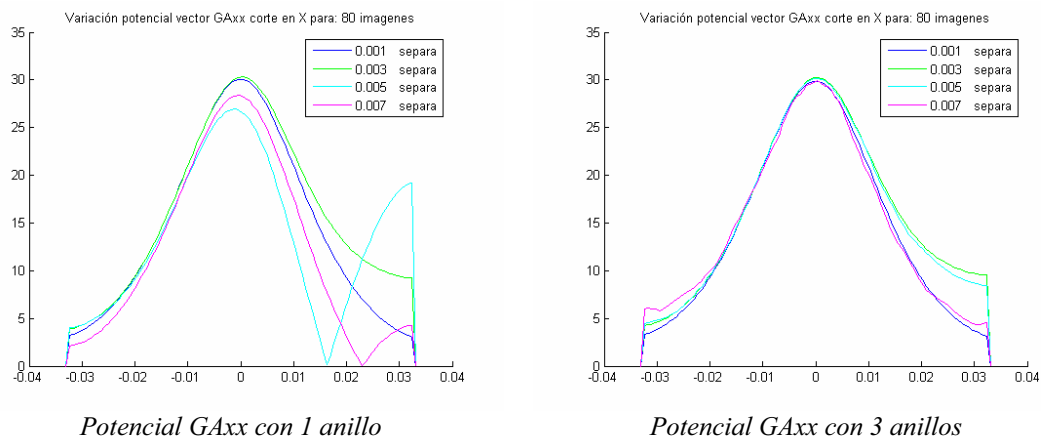


Figura 5.26 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia cercana de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

Verificamos como los resultados obtenidos en esta ocasión son plenamente convergentes, apreciando como el corte a la distancia de 7mm de la guía presenta unos valores más pobres al introducir varios anillos. Esto es debido a problemas numéricos al realizar las integrales de Sommerfeld.

Realizamos un estudio similar para el caso del potencial vector, con el fin de obtener la distancia óptima de ubicación de imágenes:



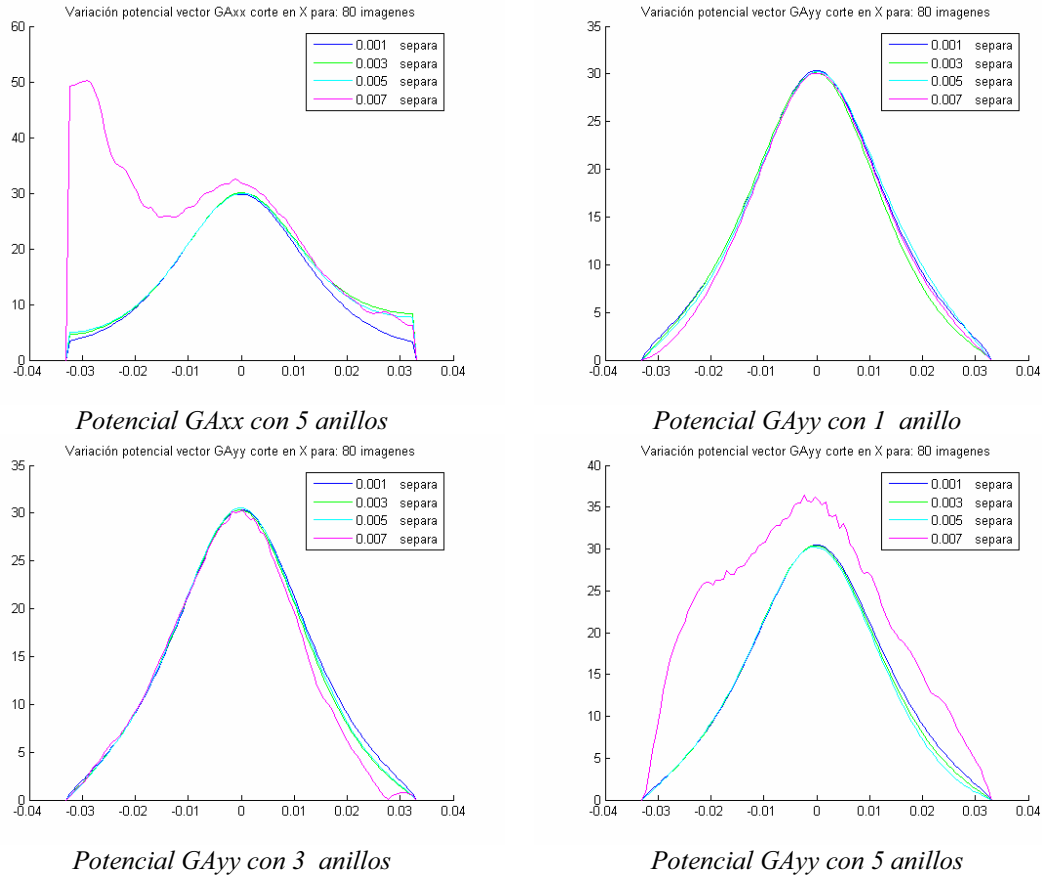


Figura 5.27 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos de 80 imágenes, en función de la distancia cercana de los mismos a la cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

Comprobamos como se produce el mismo efecto que en el caso del potencial escalar, pues al ubicar las imágenes relativamente lejos de las cargas (7 mm) obtenemos resultados claramente incoherentes. Por otro lado, vemos como se ha producido una convergencia importante de los resultados, situando las imágenes entre 3 y 5 mm de la cavidad.

De esta forma, seleccionaremos una ubicación de imágenes a 5 mm de la cavidad; así evitamos encontrarnos en una zona demasiado cercana a la estructura y seguimos obteniendo resultados coherentes.

Una vez hallada la ubicación aproximada de las imágenes, vamos a realizar un barrido en función del número de imágenes empleadas en cada anillo, para ver el número mínimo de las mismas necesarias para alcanzar resultados convergentes. El número de anillos también será variado, empleando 1,3 y 5 anillos.

En la figura 5.28 podemos comprobar como para un corte cualquiera del potencial escalar no obtenemos una convergencia con el número de imágenes, ni siquiera empleando un número elevado de anillos (5) y con una frecuencia relativamente baja (1 Ghz). Mismos resultados encontramos en la figura 5.28 para el potencial vector, de los cuales no podemos extraer ninguna conclusión positiva.

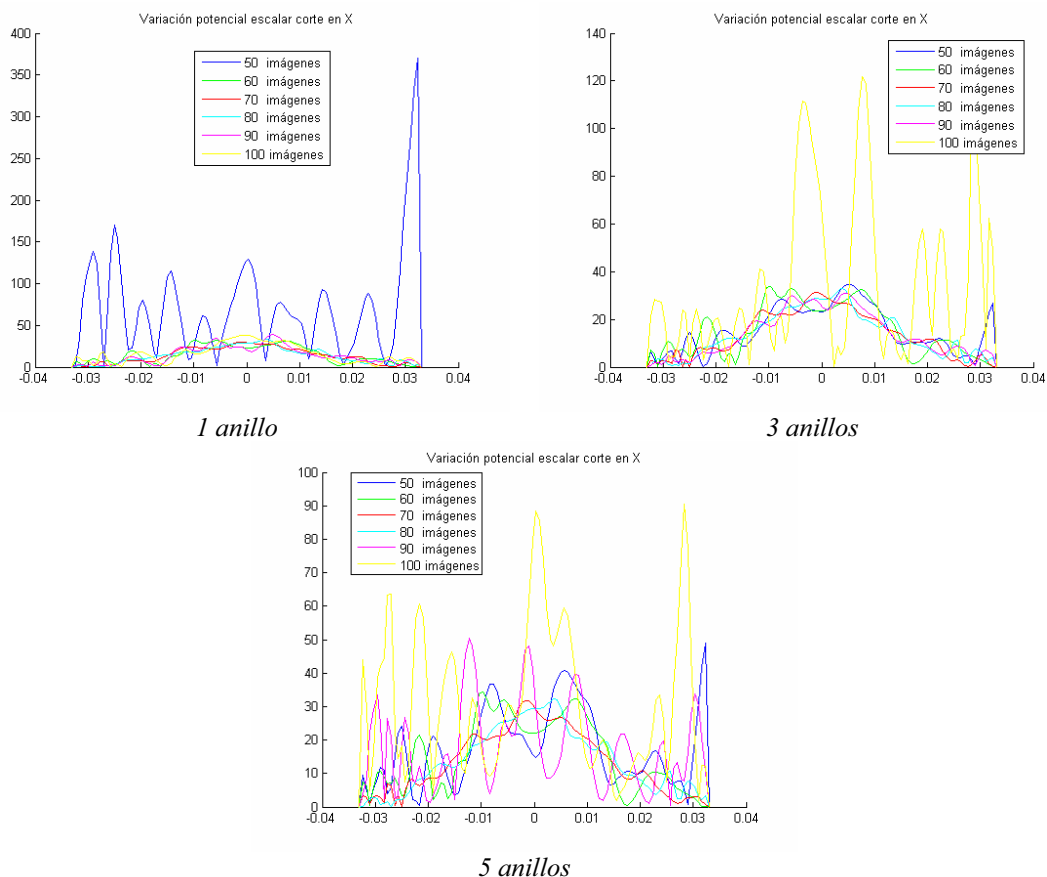
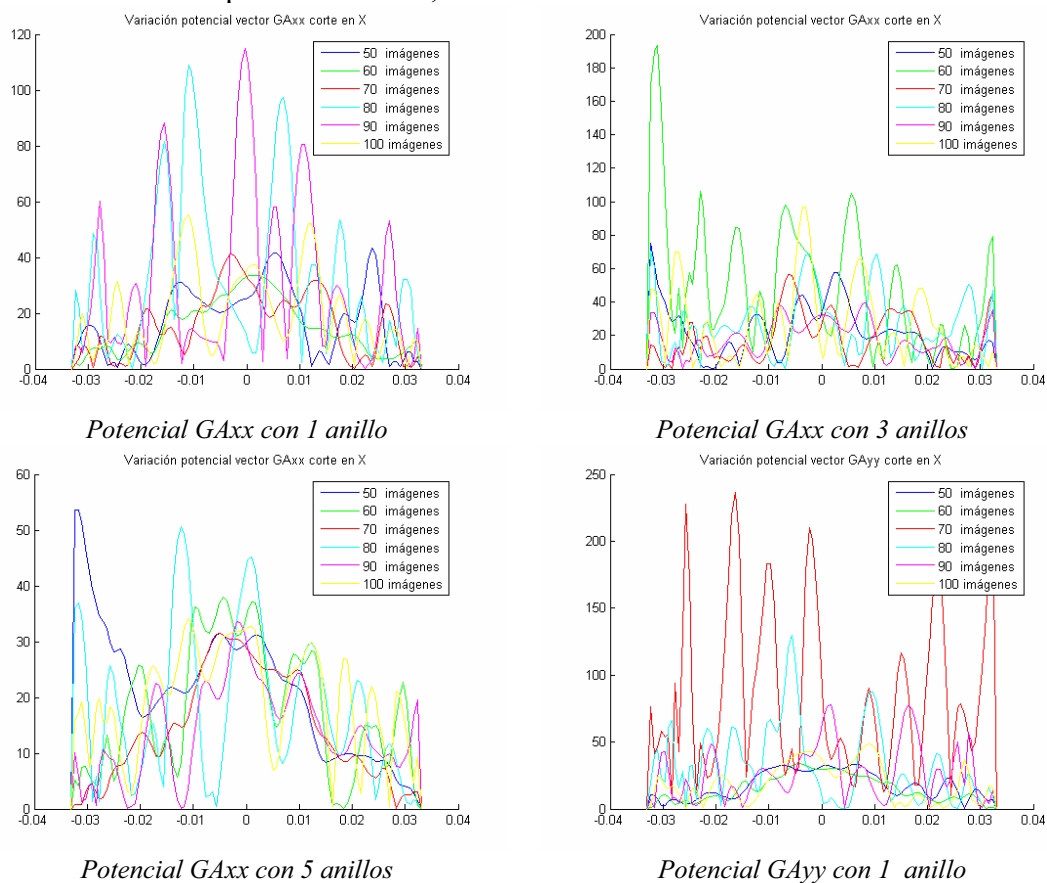


Figura 5.28 Potencial escalar en un corte para 1,3 y 5 anillos en función del número de imágenes por anillo en una cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

En cuanto al potencial vector, obtenemos unos resultados de:



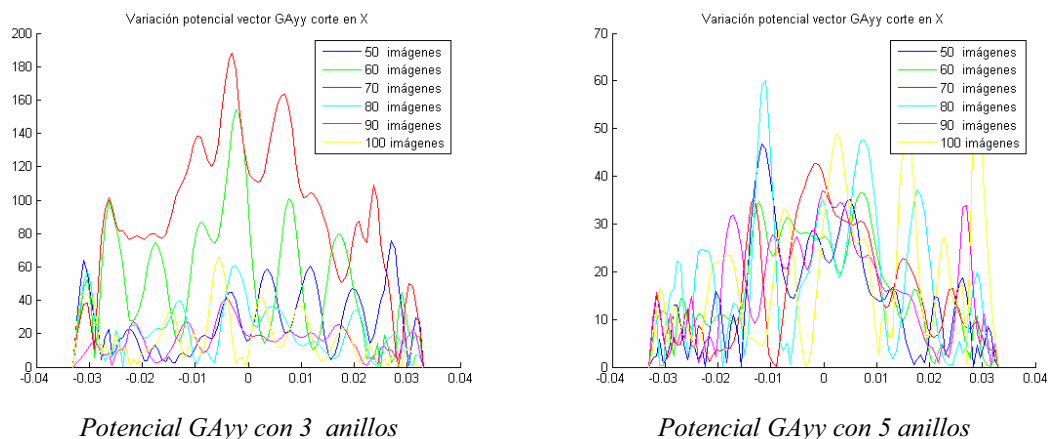


Figura 5.29 Potencial vector en un corte para 1,3 y 5 anillos en función del número de imágenes por anillo en una cavidad cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm.

En este punto comprobamos como no ha sido posible encontrar una configuración de puntos de contorno e imágenes válidos para el análisis de los potenciales en este tipo de guías. No obstante, se ha verificado como aparecen resultados convergentes al ubicar las cargas en el interior del “entrante” de la guía; en cuanto al número de imágenes no hemos encontrado un límite a partir del cual obtengamos resultados convergentes.

El problema de convergencia encontrado es debido al entrante de la guía: concretamente a la dificultad de seguir la forma del mismo mediante puntos discretos, que aunque impone su condición de contorno no permite extender esta condición a puntos adyacentes, debido al cambio brusco en la geometría que presentan estos.

Así, aparecen errores numéricos significativos a la hora de analizar esta guía que pueden ser apreciados como “picos” encontrados en la zona del entrante. Un ejemplo muy claro de estos picos los podemos encontrar visualizando los potenciales a una frecuencia de resonancia de la cavidad (por ejemplo la primera la encontramos a 6.122Ghz, en el apartado siguiente mostraremos un método para calcularlas). A esta frecuencia y con un total de 80 imágenes, obtenemos un resultado de:

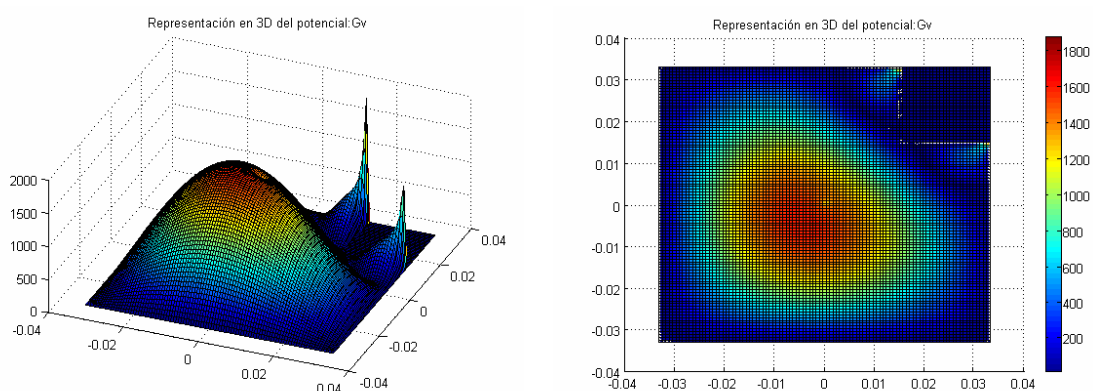


Figura 5.30 Visualización de “picos” de error en el potencial escalar de una guía cuadrada de 66x66x30mm, con un corte en una esquina de 18x18mm. 6.122Ghz. 60 imágenes.

Observamos como a pesar de aparecer la resonancia de la cavidad de forma correcta, obtenemos unos “picos” de error alrededor del entrante. Estos picos de error son los que impiden que se produzca la convergencia al variar las distancias de ubicación de imágenes y el número de las mismas.

Para terminar con el estudio de la convergencia de los potenciales en esta guía, vamos a visualizar la matriz formada para la resolución del sistema de ecuaciones del potencial escalar (definido en la ecuación 5.20 para un caso general multianillo). El objetivo es comparar la “forma” de la matriz para la guía dual analizada con la guía cuadrada, cuyos resultados están validados. Así, para 80 imágenes obtenemos:

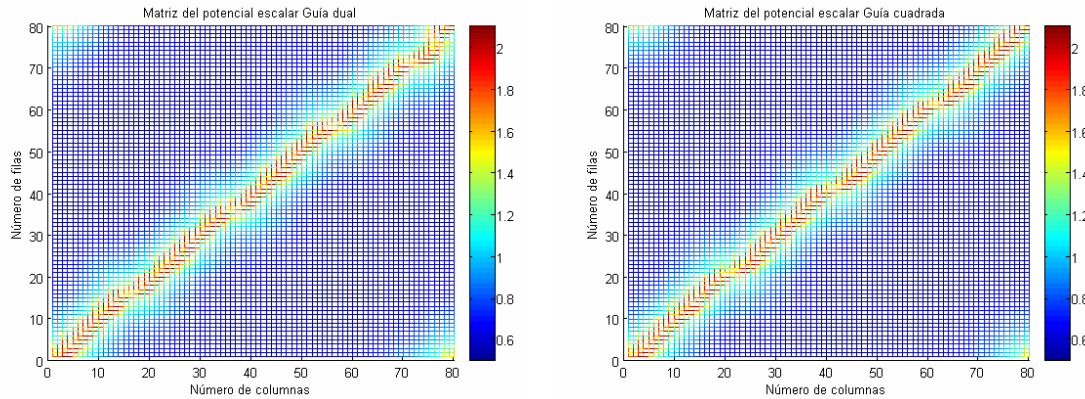


Figura 5.31 Visualización de las matrices del potencial escalar para las guías cuadrada y dual, al emplear 80 imágenes.

Comprobamos una pequeña diferencia en la esquina superior derecha, un desplazamiento de la diagonal inferior que es la que influye en el resultado final (con la presencia de los picos) y que es provocada por el entrante de la guía dual.

En el capítulo siguiente, realizaremos un análisis de la guía dual aquí presentada partiendo de este estudio de convergencia, aprovechando la ubicación de imágenes descrita y empleando un número elevado de imágenes (80-90). Así compararemos los resultados obtenidos con los proporcionados con HFSS© para el campo eléctrico, viendo que aunque aparecen algunas diferencias coinciden de forma general con lo esperado.

5.4.2 Estudio Guía Rombo en función de sus ángulos internos

En este punto vamos a estudiar la guía rombo, observando su convergencia en función de los ángulos internos que presente. La variación de los ángulos internos (mostrados como α y β en la figura) transformará la guía rombo desde una guía cuadrada de dimensiones 66x66x15mm girada 90° hasta una guía muy alargada y estrecha en el eje ‘x’. Gráficamente:

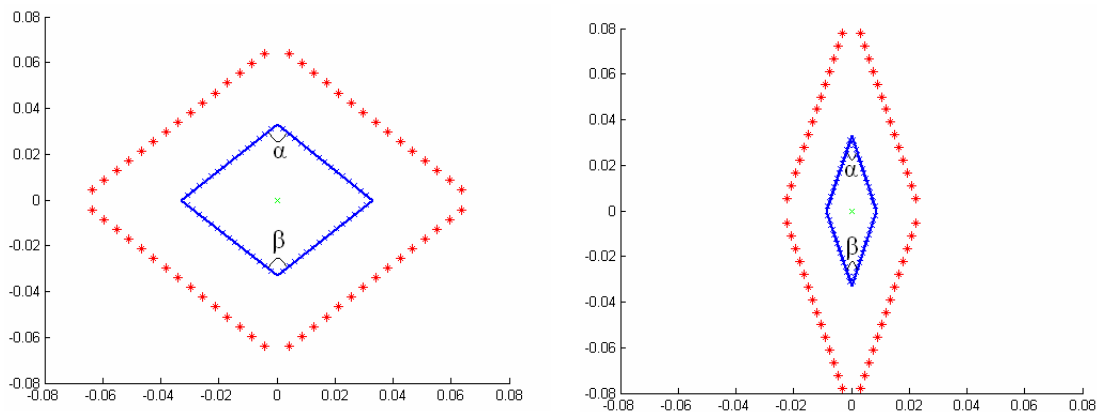


Figura 5.32 Ejemplos de guías rombos, con distintos ángulos internos.

Una de las formas de mostrar que los resultados son correctos es mostrando su convergencia al variar la distancia de separación de las imágenes dentro de un determinado margen, así como mostrando que a partir de un determinado número de imágenes los resultados son totalmente convergentes.

La guía rombo “base” que analizaremos presenta unas dimensiones de 66x66x15mm, siendo sus cuatro ángulos internos de 90°. Mostraremos los resultados en el eje ‘X’ de la guía, variando la distancia de separación de 60 imágenes situadas en un único anillo, a una frecuencia relativamente alta como son 10Ghz.

Así obtenemos:

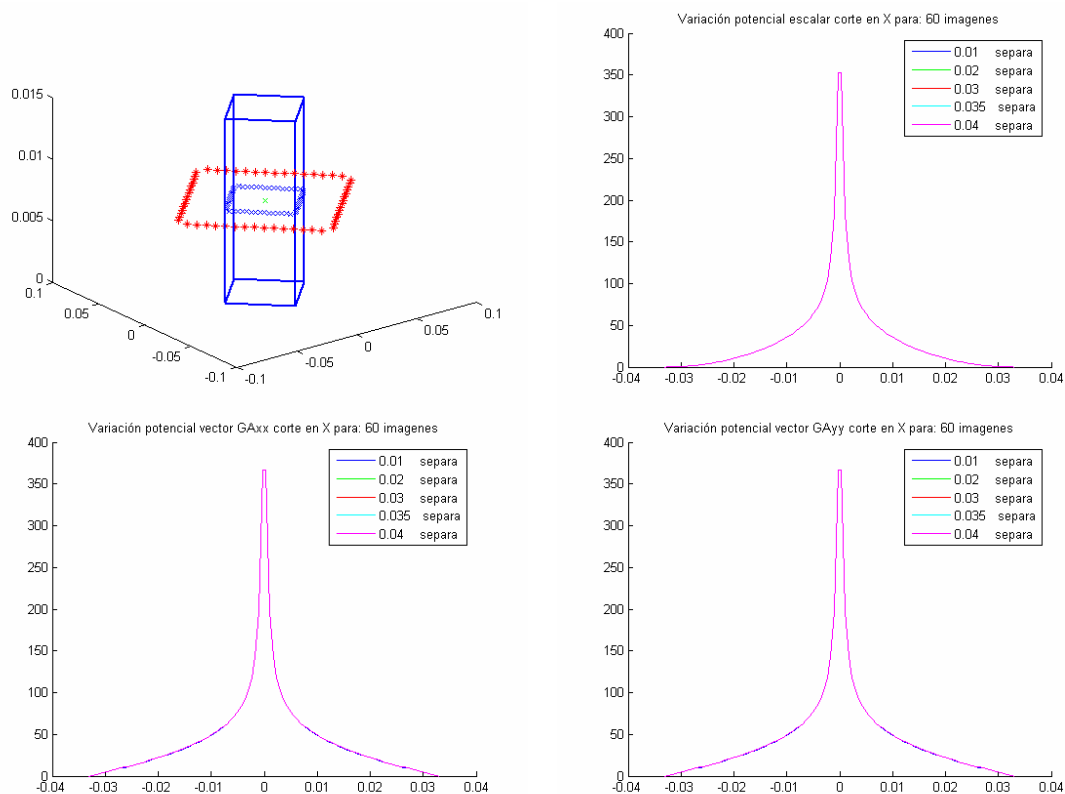


Figura 5.33 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 90°

Se puede observar como la convergencia con las distintas ubicaciones de las imágenes es perfecta, por lo que damos este resultado por válido. En el capítulo siguiente, calcularemos las frecuencias de resonancia de esta estructura y los potenciales en las mismas comparándolos con los resultados proporcionados por HFSS© verificándose la corrección de los cálculos.

Vamos a reducir los ángulos interiores de la guía, concretamente estableceremos $\alpha = \beta = 60^\circ$ con el fin de observar como varía la convergencia. En la figura 5.34 podemos apreciar los potenciales en el corte X central de la nueva guía, comprobando como la convergencia sigue siendo muy buena y que únicamente han aparecido pequeñas variaciones en el potencial vector GAxx, siendo éstas prácticamente despreciables.

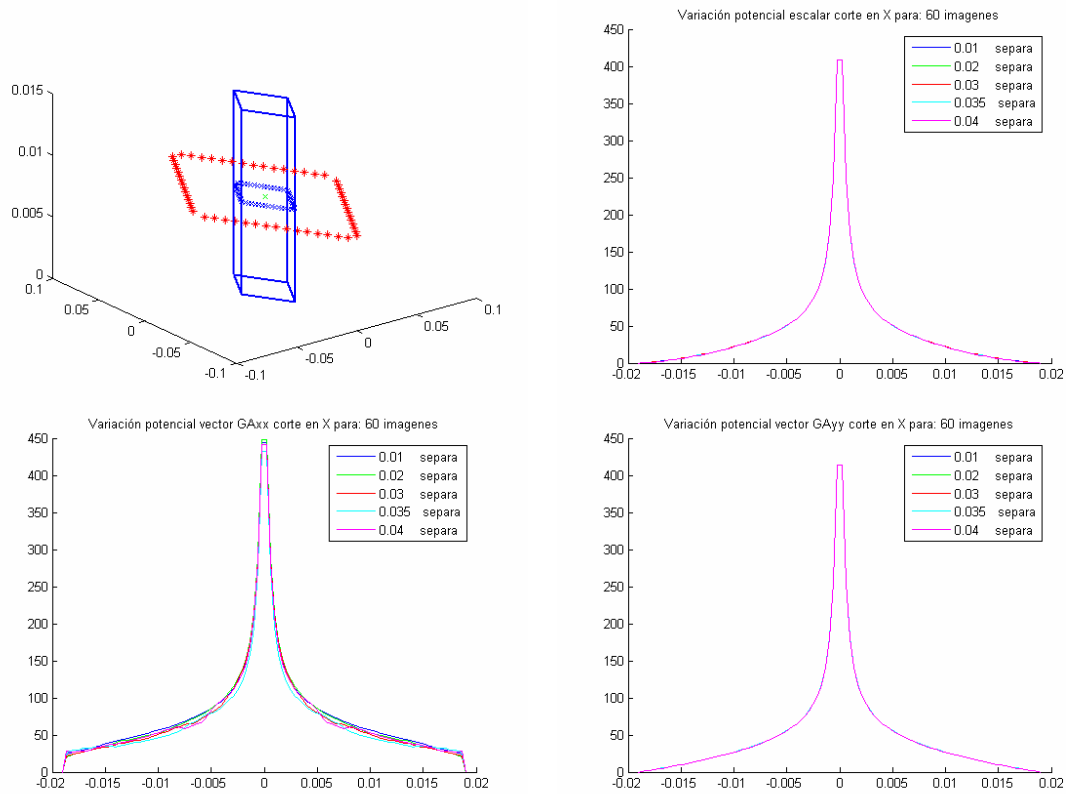


Figura 5.34 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 60°

De esta forma comprobamos como el método es robusto al variar estos ángulos interiores. Vamos a continuar estas variaciones, reduciendo todavía más los ángulos internos a un valor de $\alpha = \beta = 45^\circ$ manteniendo el resto de características igual. Los valores de los potenciales en el eje 'X' encontrados en esta situación son los siguientes:

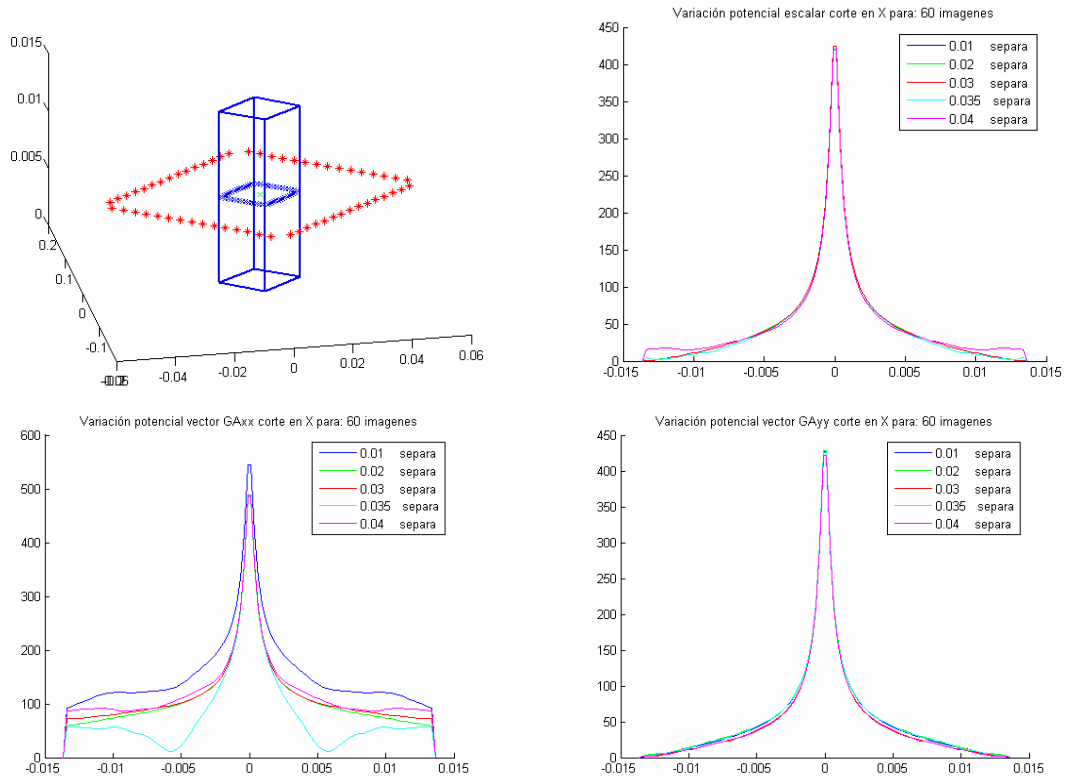


Figura 5.35 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 45°

En la figura anterior podemos observar una convergencia casi perfecta en el potencial escalar (donde únicamente aparecen unas pequeñas variaciones en la separación máxima, es decir a 40 milímetros de la guía) así como del potencial vector GAyy. En cuanto al potencial vector GAxx, ya empiezan a aparecer problemas de convergencia, debido a la disminución progresiva de los ángulos internos del rombo. No obstante, analizando en detalla su gráfica podemos ver una convergencia clara entre las separaciones de 20,30 y 40 milímetros. Esto parece indicar que a esa distancia se encuentra la ubicación óptima de las imágenes.

De esta forma, comprobamos como la guía rombo con sus ángulos interiores a 45° esta casi en el límite de límite de convergencia, proporcionando resultados que, aunque puedan contener algunos errores, son válidos.

Finalmente, disminuirémos todavía más los ángulos internos de la guía, hasta un valor de 30° . Los resultados de los potenciales que obtenemos son los siguientes:

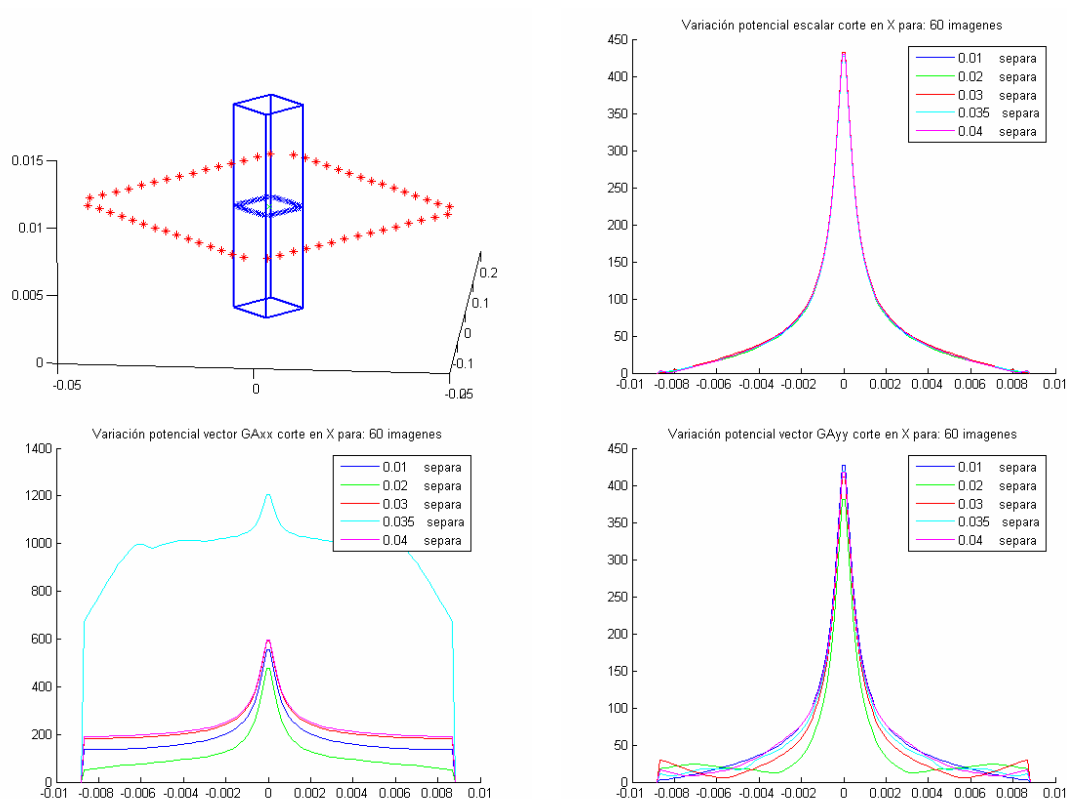


Figura 5.36 Potenciales en el corte X central para una guía rombo con ángulos internos de 30°

Observamos que a pesar de que los resultados del potencial escalar son válidos, no lo son para el potencial vector, apareciendo diferencias más que significativas entre las distintas ubicaciones de las imágenes.

De la misma forma, si elegimos una posición de las imágenes (por ejemplo a 10 milímetros de la cavidad) observamos como al variar el número de las mismas no obtenemos resultados convergentes:

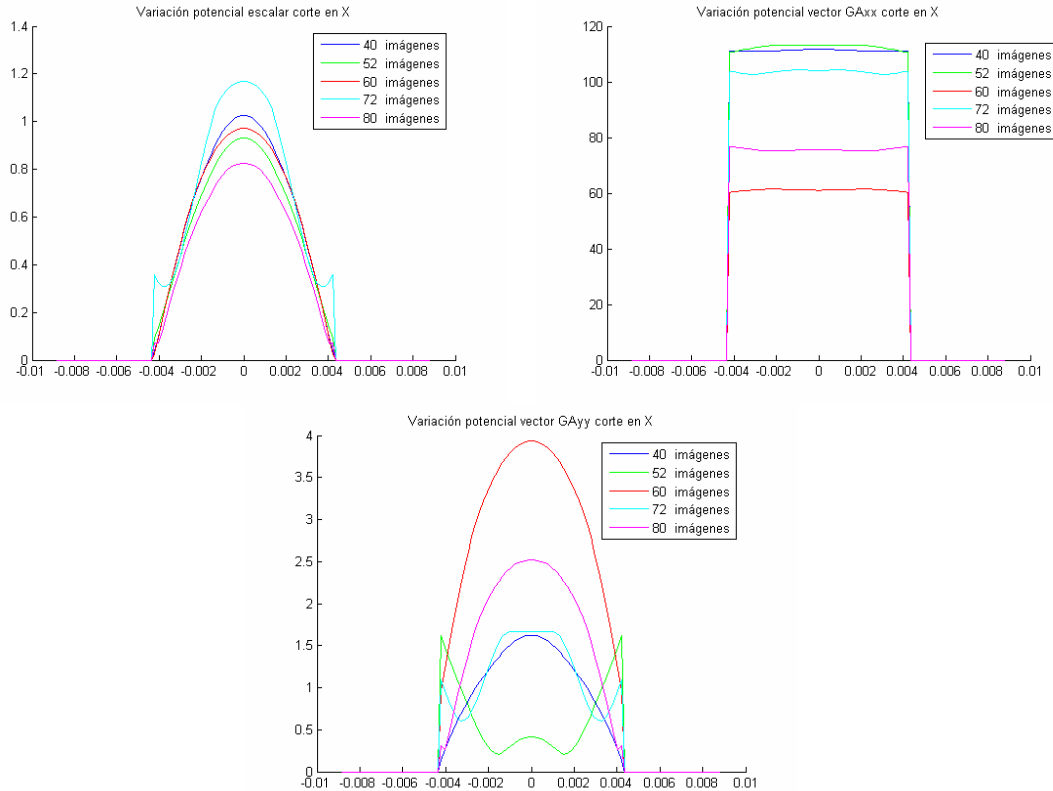


Figura 5.37 Potenciales en el eje X de una guía rombo con ángulos internos de 30°. Variación del número de imágenes de un único anillo. Frecuencia de 10Ghz.

Comprobamos como los resultados para el potencial escalar no son muy diferente al variar el número de imágenes, mientras que para el potencial vector si lo son y no existe una convergencia ente las distintas opciones.

Estos errores introducidos en el método aparecen, al igual que en el ejemplo del apartado anterior, como “picos” de los potenciales en las esquinas contiguas de la zona conflictiva (en este caso los ángulos muy cerrados). Este efecto lo podemos observar de forma muy clara al analizar esta guía rombo a una frecuencia de 12 Ghz, siendo especialmente visible en el potencial vector G_Ayy:

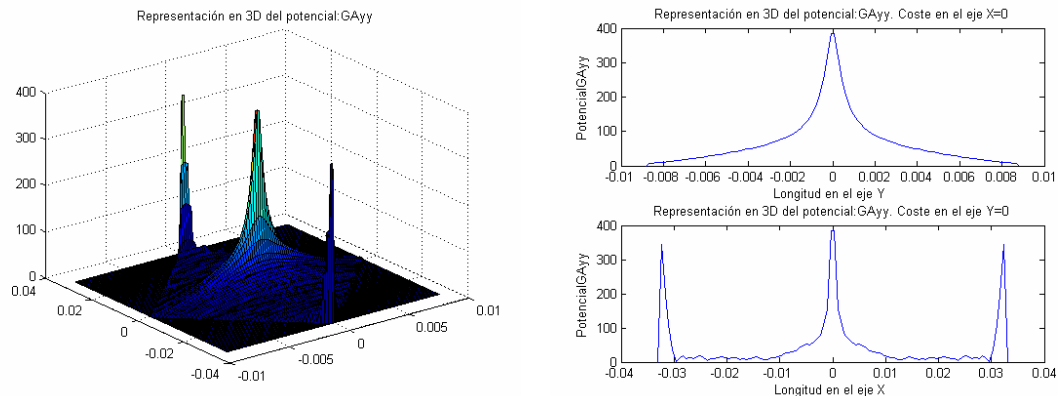


Figura 5.38 “Picos” de error al analizar una guía rombo con 2 ángulos internos con 30° a 12 Ghz. Potencial vector G_Ayy.

De esta forma no hemos encontrado una ubicación de puntos tangentes en el contorno del rombo y de imágenes a su alrededor que nos proporcionen unos potenciales exactos para guías rombo con ángulos internos inferiores a 45° .

5.4.3 Conclusiones

Tras realizar dos ejemplos en el que hemos estudiado la convergencia de ciertas guías, podemos concluir que el método propuesto tiene ciertas dificultades cuando las guías que estamos analizando presentan determinadas “formas” como entrantes ó ángulos internos muy reducidos.

No obstante, en el capítulo siguiente se muestra como en estas guías problemáticas conseguimos unos resultados de los potenciales muy similares a los esperados (comparando los resultados con HFSS©) a pesar de no obtener una convergencia entre distintas situaciones planteadas para realizar el análisis. Ello es debido a que algunas de las ubicaciones de imágenes y puntos de contorno de la cavidad proporcionan resultados correctos, pero no tenemos forma de saber cuales son, pues al variar esa situación de partida los potenciales calculados también cambian.

Una de las posibles formas de seleccionar que situación de imágenes/puntos tangentes consigue una representación fiel de los potenciales en el interior de la guía sería mediante la extensión natural del concepto de “coste” de implementación presentado en el capítulo 3. La matemática a emplear sería la misma que la desarrollada en el capítulo 3 y 4, con la única diferencia de la introducción de la transformada de Sommerfeld y un replanteamiento para el caso multianillo. Así obtendríamos una medida del grado de representatividad de los potenciales hallados pudiendo discernir para casos tridimensionales que ubicación es la que presenta mejor precisión a la hora de calcular los potenciales.

Otra posible solución sería una modificación de la teoría presentada, empleando para ello imágenes con “posiciones complejas”. Esta técnica consiste en considerar cada coordenada de cada punto del espacio (x,y,z) como variables complejas. Así conseguimos obtener una “directividad” de cada imagen que hará que se centre exclusivamente en la zona de la cavidad que debe de controlar, evitando que interfiera con el resto de imágenes y produzca interferencias en zonas no deseadas. Existe literatura que tratan este tema en electromagnetismo, como por ejemplo en [16],[17] y [18].

5.5 Cálculo de frecuencias de resonancia

En este apartado se va a diseñar un método con la nueva técnica de las imágenes espaciales que permita el cálculo de las frecuencias de resonancia.

La técnica empleada para ello consiste en evaluar los potenciales en un punto fijo en el interior de la guía, a lo largo de la frecuencia. De este modo, el valor de los potenciales aumentará de forma importante al encontrarse en una resonancia natural de la guía, manteniéndose en valores más moderados para el resto de casos. Como inconveniente, destacar que en función de la geometría que se esté analizando, deberemos de situar la fuente puntual de tal forma que excite el modo en cuestión y el punto fijo de observación ubicarlo donde el modo no presente nulos.

Un ejemplo de esta técnica aplicada en una guía circular con dos dieléctricos puede ser encontrado en [6].

Aplicaremos el cálculo de las frecuencias de resonancia a una guía cuadrada con dieléctrico el aire ($\epsilon_r = 1$), ya que podremos obtener los valores teóricos de las mismas y nos servirá como una nueva validación de la formulación de las imágenes espaciales en coordenadas cartesianas presentada.

Se realizará el análisis sobre una guía cuadrada de dimensiones $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$, empleando para ello un total de 60 imágenes, situadas alrededor de la cavidad a una distancia de 33mm de la misma. La fuente será fijada en fuente en la posición (15,0,15)mm y el punto fijo de observación en (-15,0,15)mm. La situación que estamos planteando es la siguiente:

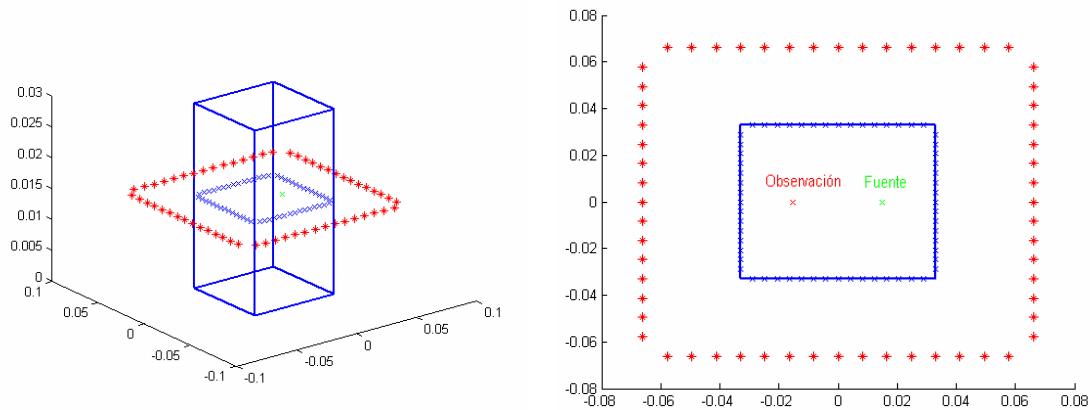


Figura 5.39 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía cuadrada de $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$, empleo de 60 imágenes situadas a 33mm.

Antes de realizar el barrido frecuencial sobre el punto de observación, vamos a calcular de forma teórica las frecuencias de resonancia de esta cavidad.

Por teoría de guía de ondas (demostrado por ejemplo en [8]), se sabe que la frecuencia de resonancia de una guía cuadrada satisface la expresión:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2 + \left(\frac{p}{C}\right)^2} \quad (5.26)$$

Donde 'c' es la velocidad de la luz en el interior de la guía; 'm', 'n' y 'p' son el número de modo excitado (según los ejes 'x', 'y', 'z' respectivamente) y 'A', 'B' y 'C' son las dimensiones de la guía a analizar.

Al considerar la cavidad en tres dimensiones, siempre estará presente la componente correspondiente a la altura de la cavidad, es decir, $p \geq 1$. Aplicando la ecuación 5.26 podemos encontrar las frecuencias de corte de los distintos modos que se propagan en la guía cuadrada:

Modo de propagación	Frecuencia de corte (Ghz)
101	5.4922
111	5.9439
201	6.757
211	7.129

Tabla 5.1 Frecuencias de resonancia de los primeros modos de una cavidad cuadrada de $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$

Realizaremos un barrido frecuencia entre 5 y 7.5Ghz, evaluando el valor absoluto del potencial en el punto fijo de observación definido en la figura 5.21. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

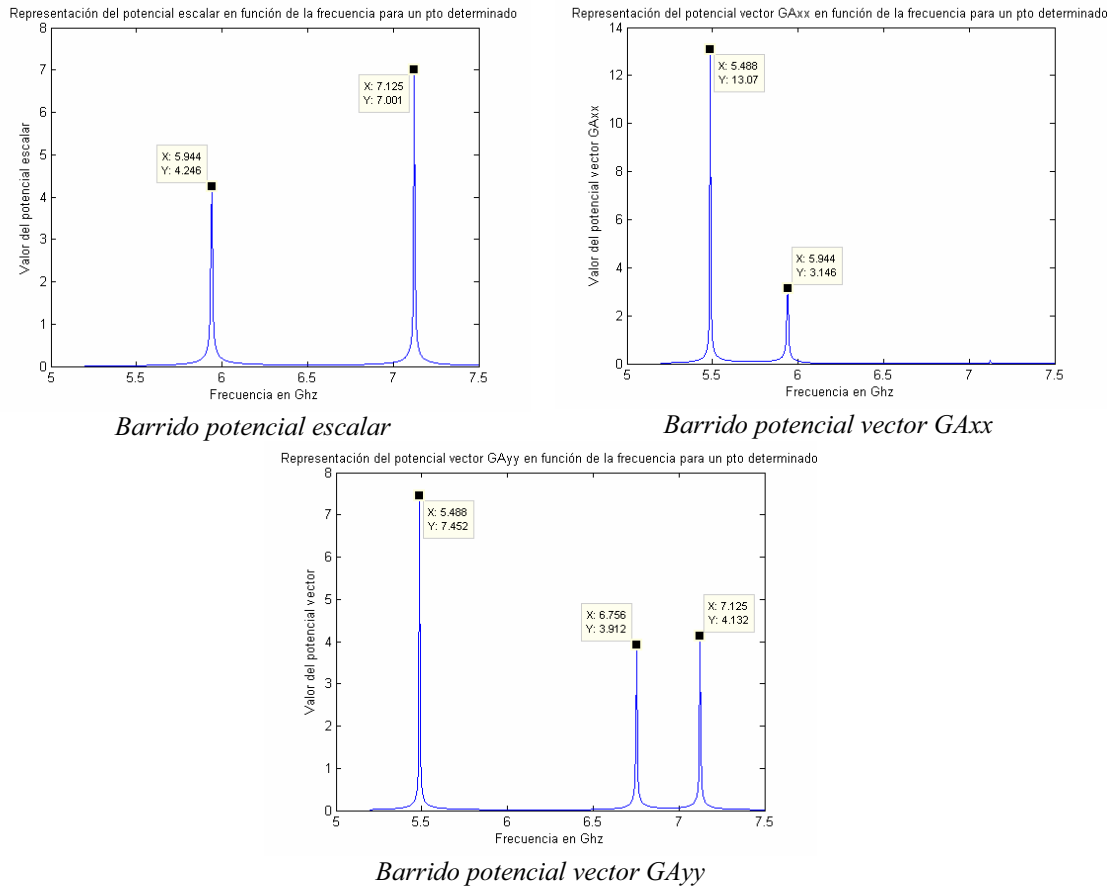


Figura 5.40 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía cuadrada de 66x66x30mm, al variar la frecuencia de 5.2 a 7.5Ghz.

Comprobamos como hemos obtenido un resultado muy satisfactorio: En el barrido del potencial escalar se han detectado las frecuencias de resonancia fc_{111} y fc_{211} ; en el barrido del potencial vector G_{Axx} se han detectado las frecuencias fc_{101} y fc_{111} ; finalmente en el barrido del potencial vector G_{Ayy} se aprecian las frecuencias de resonancia fc_{101} , fc_{201} , fc_{211} .

Observamos en la siguiente tabla las diferencias entre la frecuencia de resonancia teórica y la obtenida con el método propuesto:

<i>Modo de propagación</i>	<i>Frecuencia de corte teórica(Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
101	5.4922	5.488	0.0042	0.076%
111	5.9439	5.944	0.0001	0.0016%
201	6.757	6.756	0.001	0.014%
211	7.129	7.125	0.004	0.056%

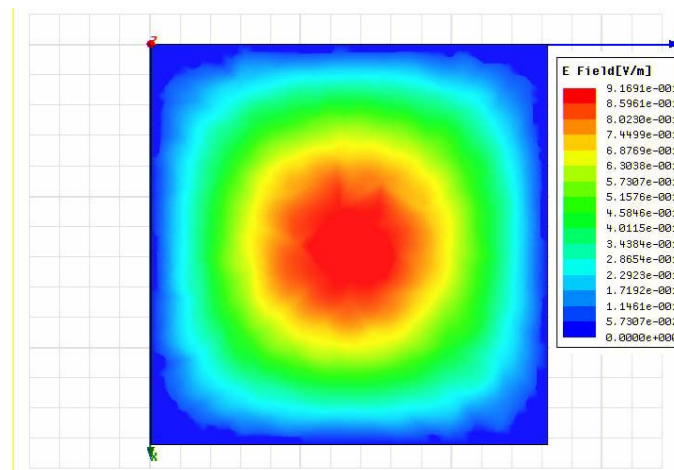
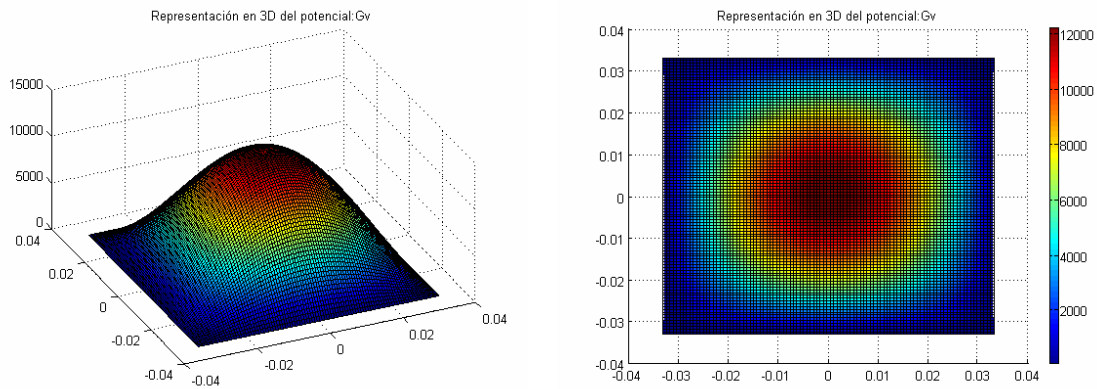
Tabla 5.2 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía cuadrada de 66x66x30mm.

Comprobamos como la precisión obtenida es realmente buena en la obtención de todas las frecuencias de resonancia; también indicar que el método propuesto presenta el inconveniente de que la precisión que presenta depende del “paso” en el barrido frecuencial realizado. De esta forma, disminuyendo este parámetro conseguiremos un aumento de la precisión obtenida, a costa obviamente de un aumento sustancial del coste computacional.

En este punto vamos a mostrar la distribución de los potenciales obtenidos en la guía cuadrada a las frecuencias de resonancia de los modos. De esta forma, se debe de observar claramente los modos excitados en cada frecuencia.

Debido a la definición realizada del potencial escalar (ecuación 5.14), éste se encuentra claramente relacionado con el campo eléctrico E_z en la guía, como se demuestra en [8]. Así, aunque no hemos hablado de la reconstrucción de los campos en el interior de la cavidad a partir de los potenciales (estudio que se podría plantear como una posible vía de continuación del proyecto) si existe una semejanza en la forma del potencial escalar y el campo eléctrico E_z . Aprovecharemos este hecho para validar los resultados una vez más, mediante el empleo del software comercial HFSS ©, que resolverá el campo en el interior de la guía empleando para ello una técnica de elementos finitos. Así, aunque los resultados del potencial escalar y campo E_z difieran en valor absoluto, la forma de los mismos en el interior de la guía debe mantenerse lo que nos indicará la corrección de los resultados.

Mostraremos en primer lugar los potenciales y el campo E_z en la frecuencia de resonancia del modo 111:



Resultado del campo E con HFSS©

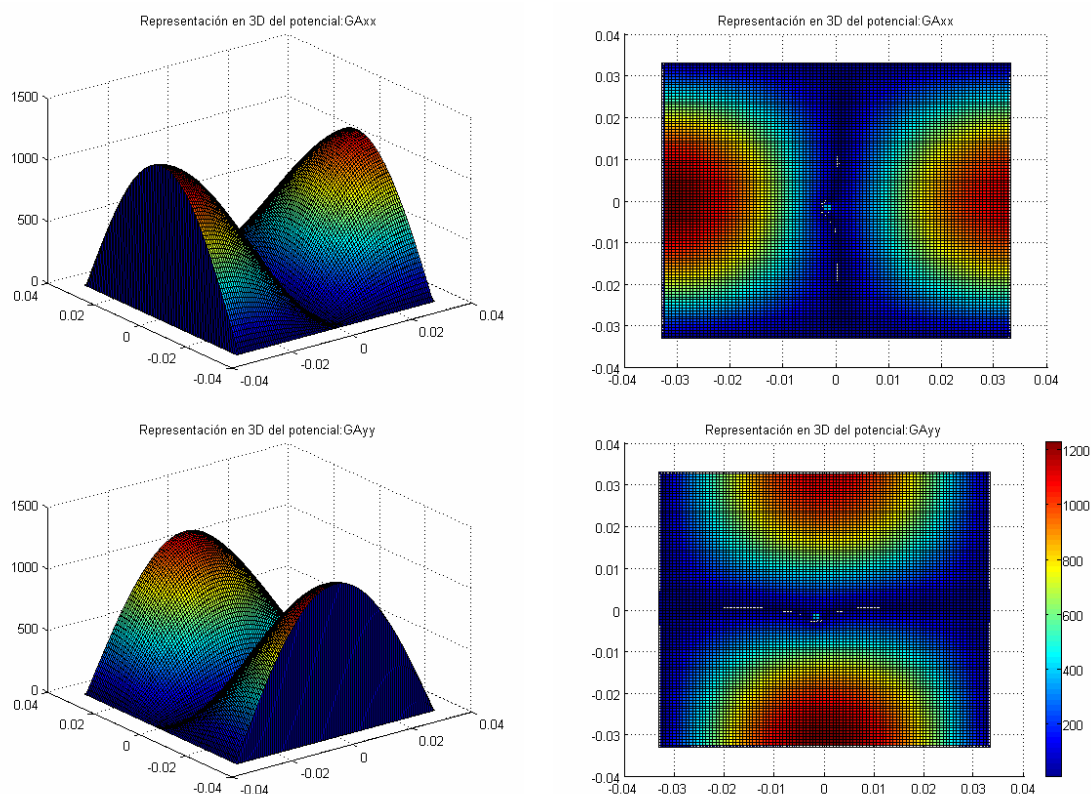
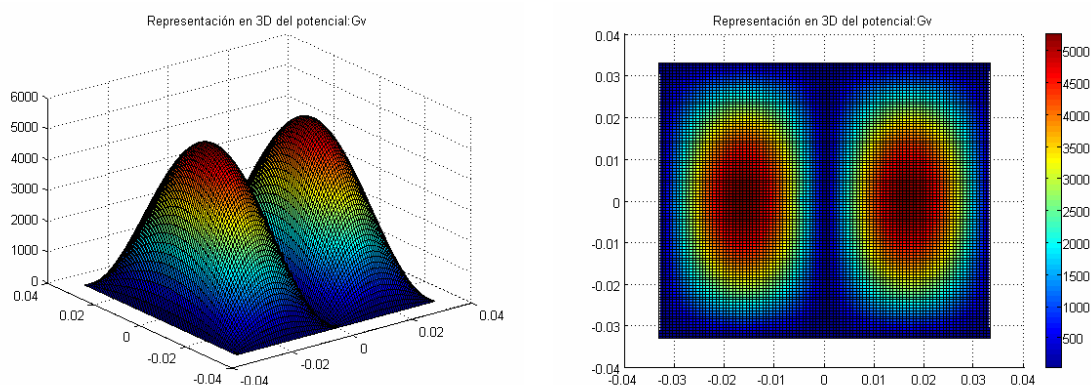


Figura 5.41 Potenciales en la primera resonancia de la cavidad cuadrada 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos como aparece una resonancia en el potencial escalar, coincidiendo en forma con el campo eléctrico calculado por HFSS ©. De esta forma, los resultados son validados.

Al igual que hemos encontrado la primera resonancia, el resto de las mismas aparecen al calcular los potenciales a su frecuencia característica. Por ejemplo, la segunda resonancia, correspondiente al modo 211, la encontramos a la frecuencia de 7.129 Ghz. Representando los potenciales en ese punto obtenemos:



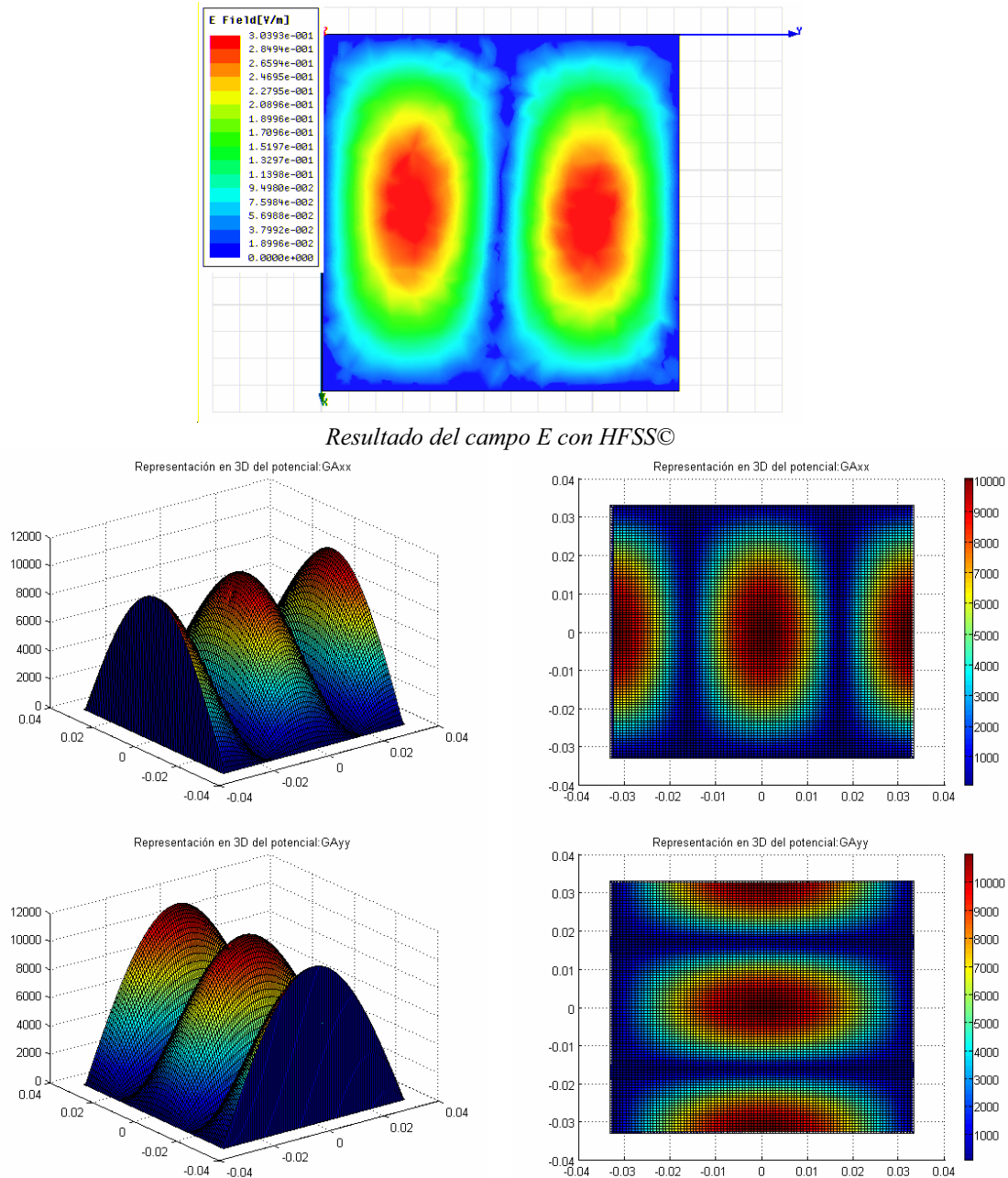


Figura 5.42 Potenciales en la segunda resonancia de la cavidad cuadrada 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos la coherencia de los resultados: el potencial escalar presenta la misma forma que el campo E_z calculado en HFSS©, además se observa muy claramente que se trata de un modo 211, ya que tiene dos variaciones en el eje 'x' y tan sólo una en los eje 'z' e 'y'.

De este modo, se da por validado el método propuesto para analizar los potenciales en el interior de cavidades tridimensionales, con unos resultados validados tanto con el método analítico descrito en [10] como con un software comercial de reconocido prestigio como es HFSS©. Además, el método propuesto para calcular las frecuencias de resonancia de la cavidad ha conseguido una gran precisión, con errores menores del 0.08% (mostrando incluso una capacidad para disminuirlos todavía más, aumentando el coste computacional).

5.6 Software desarrollado

Se han desarrollado a lo largo de este capítulo dos programas independientes: uno para la visualización de los potenciales en el interior de la guía arbitraria descrita a una determinada frecuencia y otro para realizar un barrido frecuencia con el fin de detectar las frecuencias de resonancia. En los dos casos se ha utilizado el lenguaje de programación Fortran 90 para los cálculos numéricos representándose los resultados mediante Matlab®.

5.6.1 Cálculo de los potenciales

El primero de los programas realiza el cálculo de los potenciales en el interior de las guías. La entrada de parámetros la realizaremos mediante los siguientes ficheros de texto:

1) Geom.in:

Fue descrito en detalle en el capítulo 4. En el describiremos la estructura bidimensional en los eje X-Y de la cavidad. También indicaremos la ubicación de la fuente puntual en el interior de la cavidad (sus coordenadas 'x', 'z' e 'y').

2) Datos.in

Básicamente conserva la misma estructura que la mostrada en el capítulo anterior, con los mismos parámetros de entrada. No obstante, se han deshabilitado las opciones de optimización del coste (pues no ha sido definido todavía para la cavidad) tanto por gradiente como por variación de la ubicación de imágenes.

Además, se ha añadido un nuevo parámetro que indica la forma en la que se distribuirán los anillos. Así estos se podrán establecer de forma automática (con un valor de 3) manual (con un valor de 1) ó modificando directamente el código fuente (con un valor de 2).

Un ejemplo de este fichero se muestra a continuación:

```
! Datos de entrada del programa
! Frecuencia
6.0D9
! Número de cargas/dipolos imagen.
30
! Número de puntos de la rejilla (x,y)
80      80
! Ubicación de pto tangentes
0
! Ubicación de imágenes
5
! Distancia empleada (en función del método)
0.033
! Distribución anillos. 3: Automático. 2: en código. 1: Según esté tlm7.in
1
```

3) Separa_anillo.in

En este fichero se especifica la forma en la que se distribuirán los anillos que envolverán la cavidad, dejando que el software se encargue de su disposición exacta. Para ello, se indicará la longitud en λ máxima que podrá controlar cada anillo (por arriba, y la misma cantidad por abajo); así como las dimensiones del eje 'z' de la cavidad y la altura de la misma en la que queremos obtener todos los datos. El software distribuirá los anillos y configurará el archivo tlm7.in para conseguir los resultados previstos.

Un ejemplo de este fichero de configuración es el siguiente:

```
! Separación entre los anillos, en términos de landa.  
0.5  
! Altura mínima de la estructura.  
0  
! Altura máxima de la estructura:  
0.03  
! Altura de la observación.  
0.015
```

4) Anillos_manual.in

Este fichero se emplea en el caso de que se quiera especificar manualmente la posición de cada anillo, así como de la fuente y del plano en el que obtener los resultados. Ello requiere en primer lugar una configuración manual del fichero "tlm7.in" descrito en este mismo capítulo, indicando las capas de la cavidad y sus características y las posiciones en la que puede haber fuente.

Un ejemplo de este fichero es:

```
! Altura mínima de la estructura.  
0  
! Altura máxima de la estructura:  
0.03  
! Número de anillos a introducir  
2  
! "Fuentes" sobre la que se encontrarán los anillos  
1  
3  
! "Fuentes" donde se encuentra la fuente puntual.  
2  
! "Fuentes" sobre la que se realizará la observación.  
2
```

Vemos que se indican la longitud en el eje 'z' de la cavidad, el número de anillos a distribuir, y la distribución de los mismos. Para ello, se indica sobre que "fuente" ó "source" de la cavidad estarán situados (haciendo todos los números referencia a la distribución de estas fuentes en la cavidad según fue descrito de forma manual en tlm7.in). Además, indicamos donde se encuentra la fuente puntual y en que corte mostrar los resultados.

Una vez introducidos todos los parámetros, obtendremos los resultados en ficheros de texto interpretables mediante Matlab®. Así, ejecutando el script “Inicio.m” visualizaremos los potenciales en los cortes señalados, la estructura que estamos analizando y los distintos cortes con los ejes.

Finalmente destacar que la opción automática distribuirá los anillos y creará las capas, pero impondrá las mismas características a todas ellas: permitividad y permeabilidad relativa de valor 1. En la opción manual, se da posibilidad de cambiar los dieléctricos de la cavidad así como de distribuir los anillos en las posiciones que se crean más adecuadas.

5.6.2 Barrido en frecuencia

Este programa se encarga de realizar el cálculo de los potenciales en un punto fijo al realizar un barrido en frecuencia. Todos los ficheros de entrada explicados en el apartado anterior siguen siendo válidos, descartándose los parámetros que no sean relevantes en este caso (como una frecuencia puntual ó el tamaño de la rejilla).

Tendremos un nuevo fichero de entrada, denominado “*Barrido.in*” en el que especificaremos la posición del punto fijo de observación, los límites frecuenciales entre los que realizaremos el barrido y el número de puntos del mismo. Un ejemplo será:

! Posición del punto fijo de observación
0 0 0
! Frecuencia inicial
5.0D9
! Frecuencia final
10.0D9
! Número de puntos
500

Una vez ejecutado el programa, obtendremos el resultado de las resonancias mediante el script de Matlab® “*frecuencias.m*”, que nos mostrará el barrido frecuencial realizado en los distintos potenciales.

Destacar que el coste computacional de este programa depende directamente del número de puntos en frecuencia escogidos, siendo muy elevado para un valor relativamente alto de este parámetro.

6. Ejemplos de Análisis de guías-onda tipo

6.1 Introducción

En este capítulo vamos a realizar el análisis de los potenciales en el interior de diversos tipos de guías-onda empleados habitualmente en telecomunicaciones.

Para el análisis emplearemos todas las técnicas presentadas en los capítulos anteriores (siendo especialmente relevante el uso de uno ó varios anillos alrededor de la guía a analizar en función de la altura eléctrica de la misma), de tal forma que en primer lugar realizaremos un barrido en frecuencia de la guía con el fin de conocer donde se encuentran sus frecuencias de resonancia. La técnica, descrita en el capítulo anterior, consiste en evaluar un punto discreto en el interior de la guía variando la frecuencia hasta encontrar las resonancias.

En este punto, realizaremos una comparación de las frecuencias obtenidas con las calculadas con el software comercial HFSS©. Este programa emplea el método de los elementos finitos y plantea un problema de autovalores. En función de la “resolución” introducida obtendremos una precisión u otra.

Posteriormente, realizaremos una visualización de los potenciales a las frecuencias calculadas, con el fin de obtener las resonancias de cada guía. Nuevamente en este punto emplearemos HFSS© con el fin de obtener el campo eléctrico E_z en la guía y compararlo con el potencial escalar (que por su definición está relacionado con el campo eléctrico de los modos TM). Aunque no estamos representando las mismas magnitudes, al estar tan estrechamente relacionadas si que deben de guardar una misma “forma” ó distribución en el interior de la guía, variando el rango de valores (y unidades) en las que se mueven.

Así, comprobando la corrección de las frecuencias de corte calculadas y la distribución de los potenciales en el interior de la guía con el campo E_z daremos por validado el método, pues será aplicado a diversas guías reales con diferentes geometrías.

En este capítulo presentaremos los resultados para las guías: rectangular, triangular, rombo (para sus ángulos internos a 90°), trapecio, dual (cuadrada con un corte en una esquina), flange, estrella y ridge.

Además, presentaremos resultados adicionales de la convergencia de los métodos en los distintos casos según sea conveniente (como por ejemplo estudios al variar la ubicación de las imágenes o con el número de éstas).

Indicar también que hemos obviado la inclusión de la guía cuadrada simple, pues ya fue ampliamente estudiada en el capítulo anterior (hallando sus frecuencias de resonancia, visualizando sus potenciales, comprobando su convergencia con el número de imágenes y ubicación de las mismas, etc).

Para finalizar el capítulo, se muestran el estudio de una guía cuadrada con dos dieléctricos en su interior, con el fin de probar la facilidad que presenta la formulación presentada para trabajar con medios multicapa.

6.2 Guía rectangular

En este apartado vamos a analizar una guía rectangular de dimensiones 132x66x30mm, empleando para ello un total de 60 imágenes a su alrededor.

En primer lugar, realizaremos un barrido en frecuencia con el fin de encontrar las resonancias de la cavidad. Para ello, fijaremos un punto de observación en la posición (15,0,15)mm y la fuente puntual en (-15,0,15)mm y realizaremos un barrido frecuencial, evaluando los potenciales obtenidos en ese punto.

Así, la situación planteada es la siguiente:

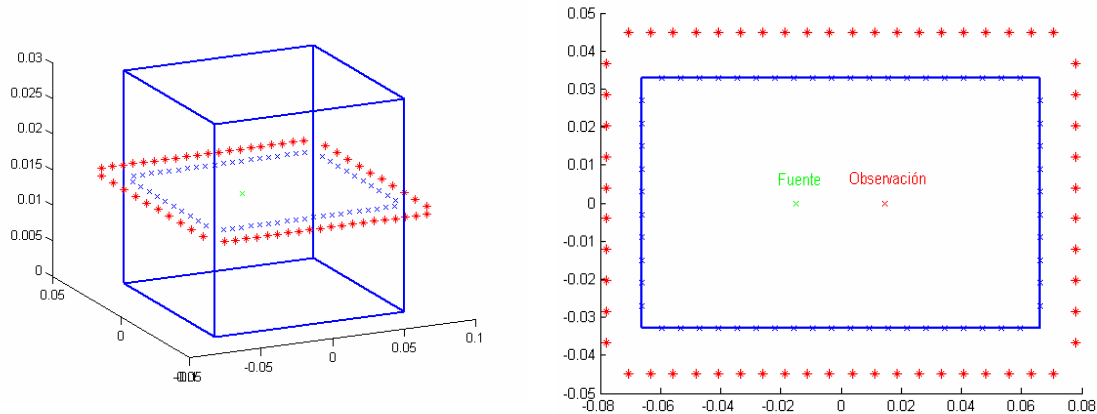


Figura 6.1 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía rectangular de 132x66x30mm, empleo de 60 imágenes situadas a 12mm.

Al igual que ocurría con la guía cuadrada, la guía rectangular permite calcular de forma analítica las frecuencias de resonancia (o de corte de los modos) mediante la ecuación:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2 + \left(\frac{p}{C}\right)^2} \quad (6.1)$$

Donde 'c' es la velocidad de la luz en el interior de la guía; 'm', 'n' y 'p' son el número de modo excitado (según los ejes 'x', 'y', 'z' respectivamente) y 'A', 'B' y 'C' son las dimensiones de la guía a analizar.

Aplicando la ecuación 6.1 podemos encontrar las frecuencias de corte de los distintos modos que se propagan en la guía rectangular estudiada:

Modo de propagación	Frecuencia de corte (Ghz)
011	5.4922
201	5.4922
111	5.6086
211	5.944
301	6.0516
311	6.4643
021	6.7573
121	6.8522
221	7.1293

Tabla 6.1 Frecuencias de resonancia de los primeros modos de una cavidad rectangular de 132x66x30mm

Realizaremos un barrido frecuencia entre 5.2 y 7 Ghz, evaluando el valor absoluto del potencial en el punto fijo de observación definido en la figura 6.1. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

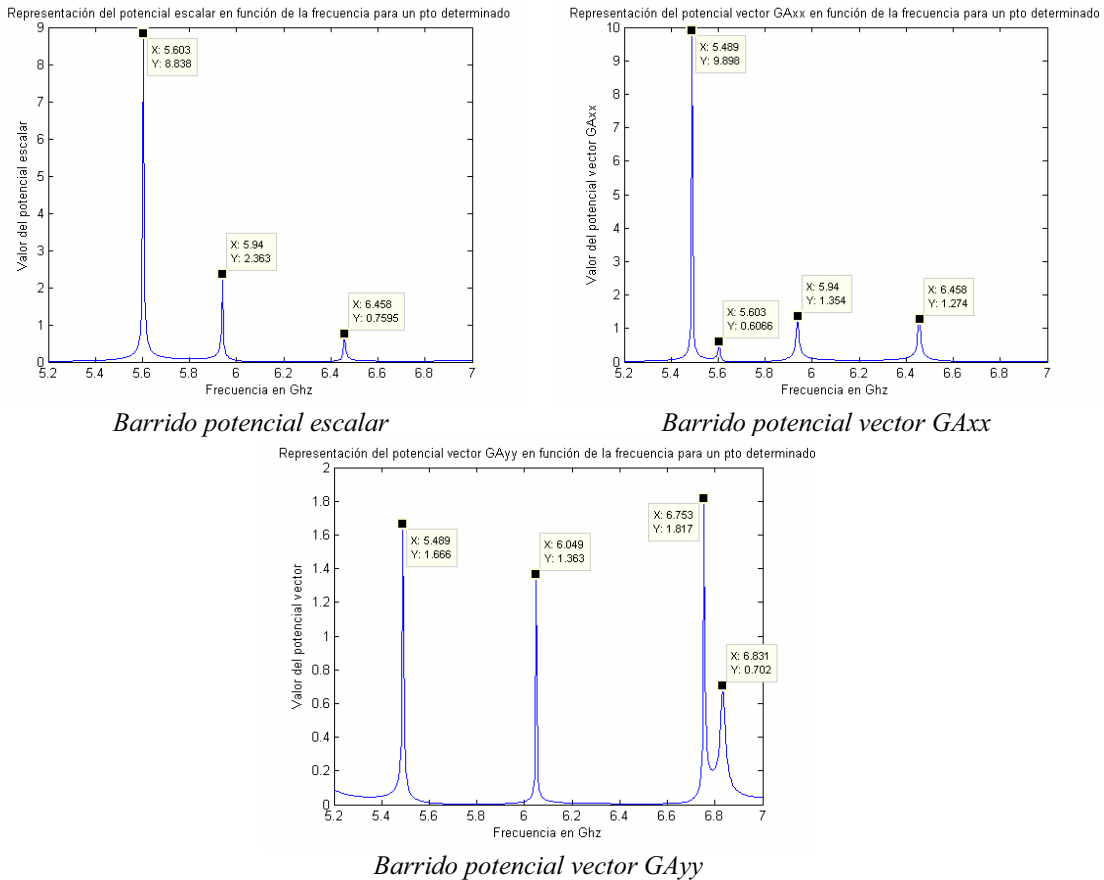


Figura 6.2 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía rectangular de 132x66x30mm, al variar la frecuencia de 5.2 a 7.0 Ghz.

Comprobamos como hemos obtenido un resultado muy satisfactorio: En el barrido del potencial escalar se han detectado las frecuencias de resonancia fc_{111} , fc_{211} , fc_{311} ; en el barrido del potencial vector GAxx se han detectado las frecuencias fc_{011} , fc_{211} , fc_{111} , fc_{211} y fc_{311} ; finalmente en el barrido del potencial vector GAYy se aprecian las frecuencias de resonancia fc_{011} , fc_{211} , fc_{301} , fc_{021} y fc_{121} .

Vemos como todas las resonancias aparecidas se corresponden con las teóricas, con una precisión muy elevada.

Observamos en la siguiente tabla las diferencias entre la frecuencia de resonancia teórica y la obtenida:

Modo de propagación	Frecuencia de corte teórica(Ghz)	Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)	Error absoluto(Ghz)	Error relativo (%)
011	5.4922	5.489	0.0032	0.058
201	5.4922	5.489	0.0032	0.058
111	5.6086	5.603	0.0056	0.099
211	5.944	5.94	0.004	0.067
301	6.0516	6.049	0.0026	0.0429

311	6.4643	6.458	0.0063	0.0974
021	6.7573	6.753	0.0043	0.0636
121	6.8522	6.831	0.0212	0.309

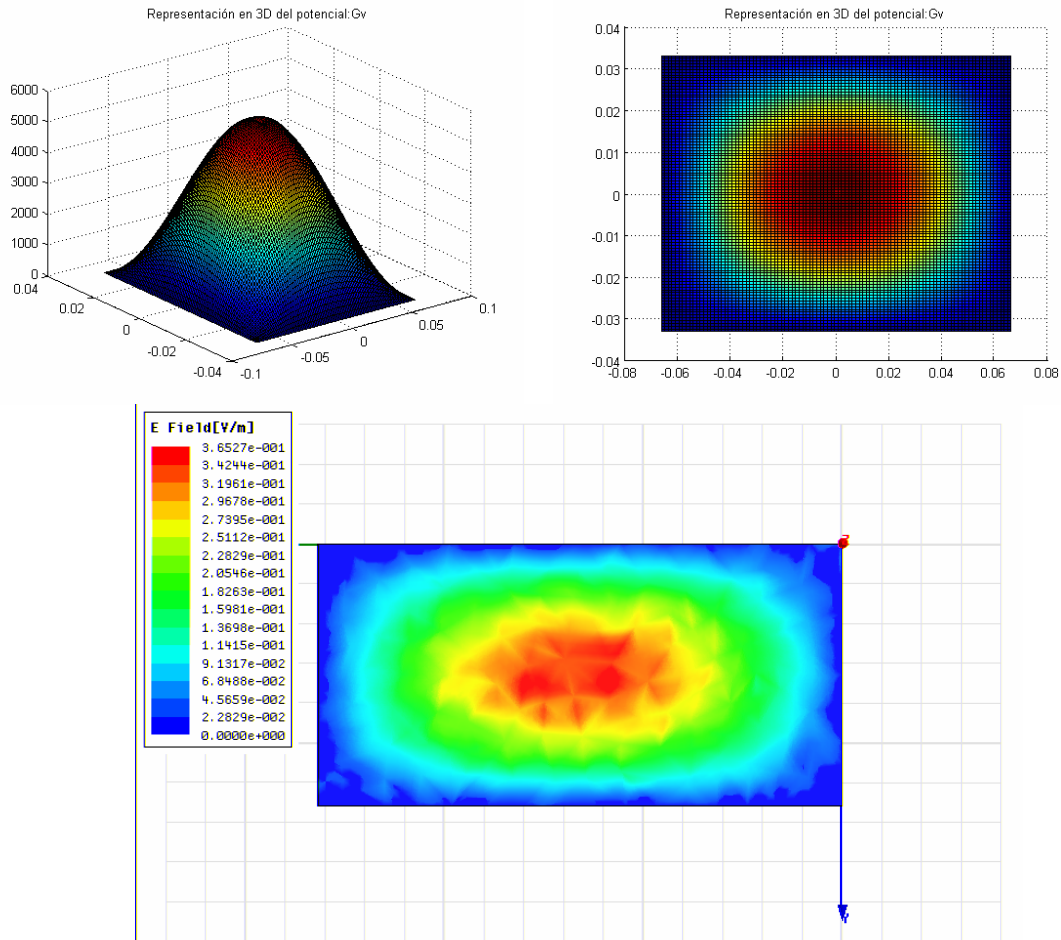
Tabla 6.2 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rectangular de 132x66x30mm.

Se puede observar la precisión obtenida es realmente buena en la obtención de todas las frecuencias de resonancia; a pesar de que el método propuesto realiza un “barrido” en puntos discretos frecuenciales.

Tras obtener las frecuencias de corte y validarlas con las obtenidas de forma teórica, vamos a mostrar la distribución de los potenciales en el interior de la guía rectangular, visualizando de forma clara que modo se excita en cada frecuencia de corte.

Tal y como comentamos anteriormente, validaremos la distribución del potencial escalar mediante la “forma” adquirida por el campo eléctrico E_z (en los modos TM), ya que la definición de ambas magnitudes está muy relacionada (como se puede observar en 5.14 para el potencial escalar y en [8] para el campo eléctrico). La representación de este campo eléctrico la realizaremos mediante HFSS©, al igual que en ejemplos anteriores.

Mostraremos en primer lugar los potenciales (a la altura en el eje ‘z’ de la fuente puntual, tanto para esta guía como para las del resto del capítulo, salvo que se indique lo contrario) y el campo E_z en la frecuencia de resonancia del modo 111 (5.6086 Ghz):



Resultado del campo E con HFSS©

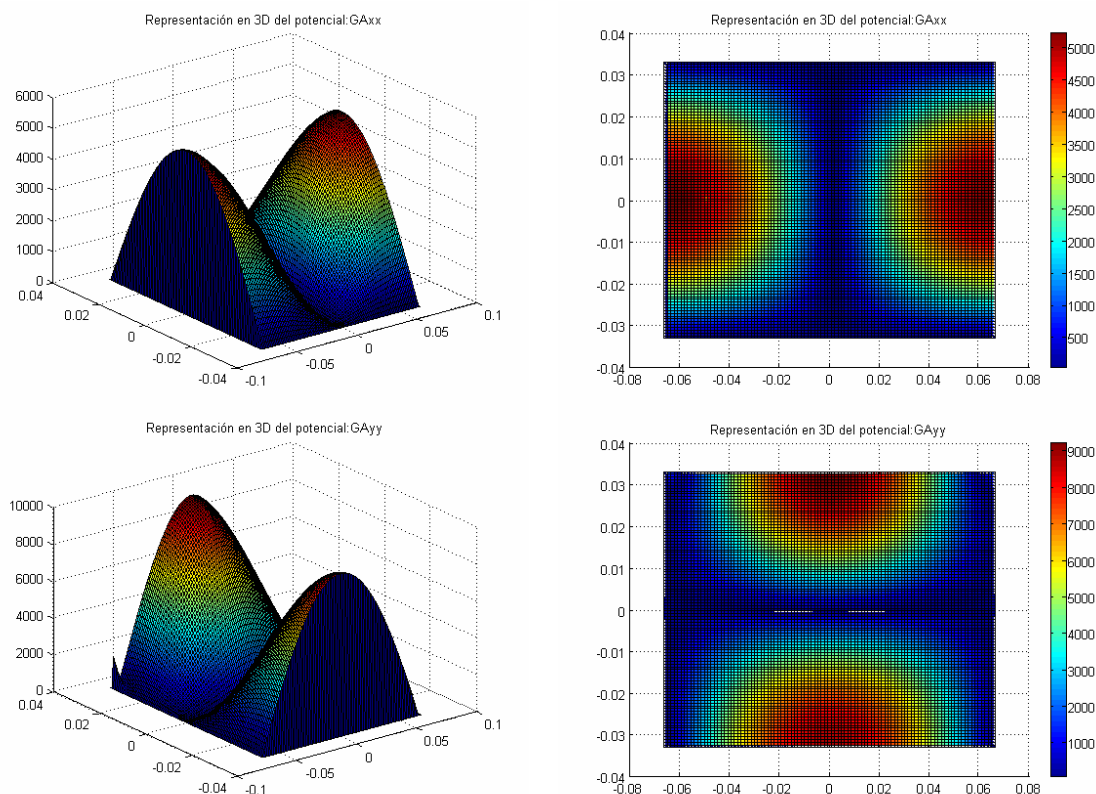
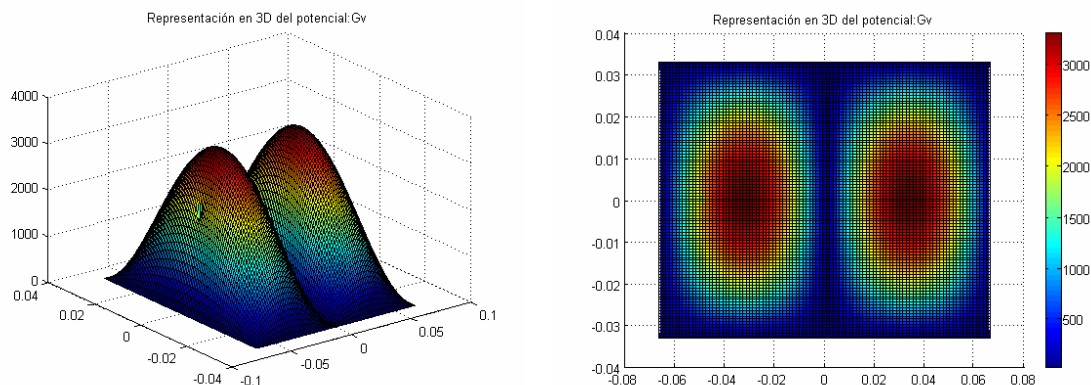
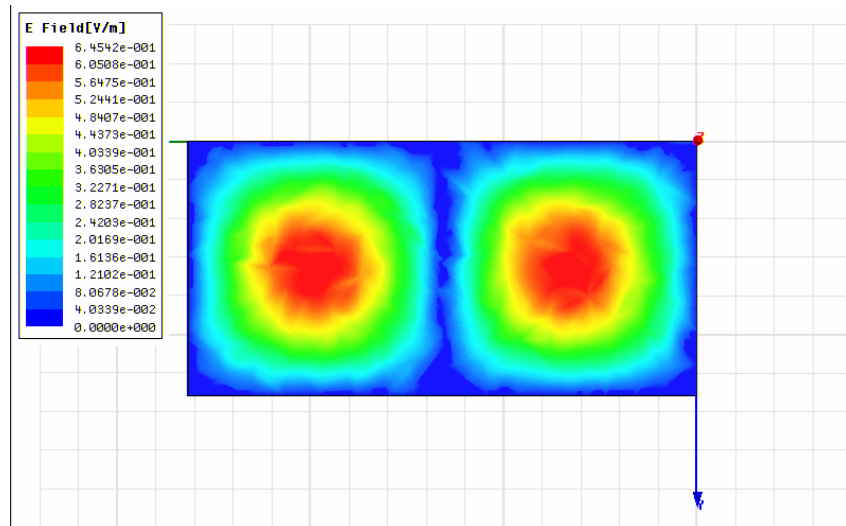


Figura 6.3 Potenciales en la primera resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos como aparece una resonancia en el potencial escalar, coincidiendo en forma con el campo eléctrico calculado por HFSS ©. De esta forma, los resultados son validados.

Al igual que hemos encontrado la primera resonancia, el resto de las mismas aparecen al calcular los potenciales a su frecuencia característica. Por ejemplo, la segunda resonancia, correspondiente al modo 211, la encontramos a la frecuencia de 5.944 Ghz. Podemos observar claramente en la figura 6.4 como el potencial escalar obtenido presenta dos variaciones en el eje 'x' y una en los ejes 'z' e 'y', cumpliendo las características del modo 211:





Resultado del campo E con HFSS©

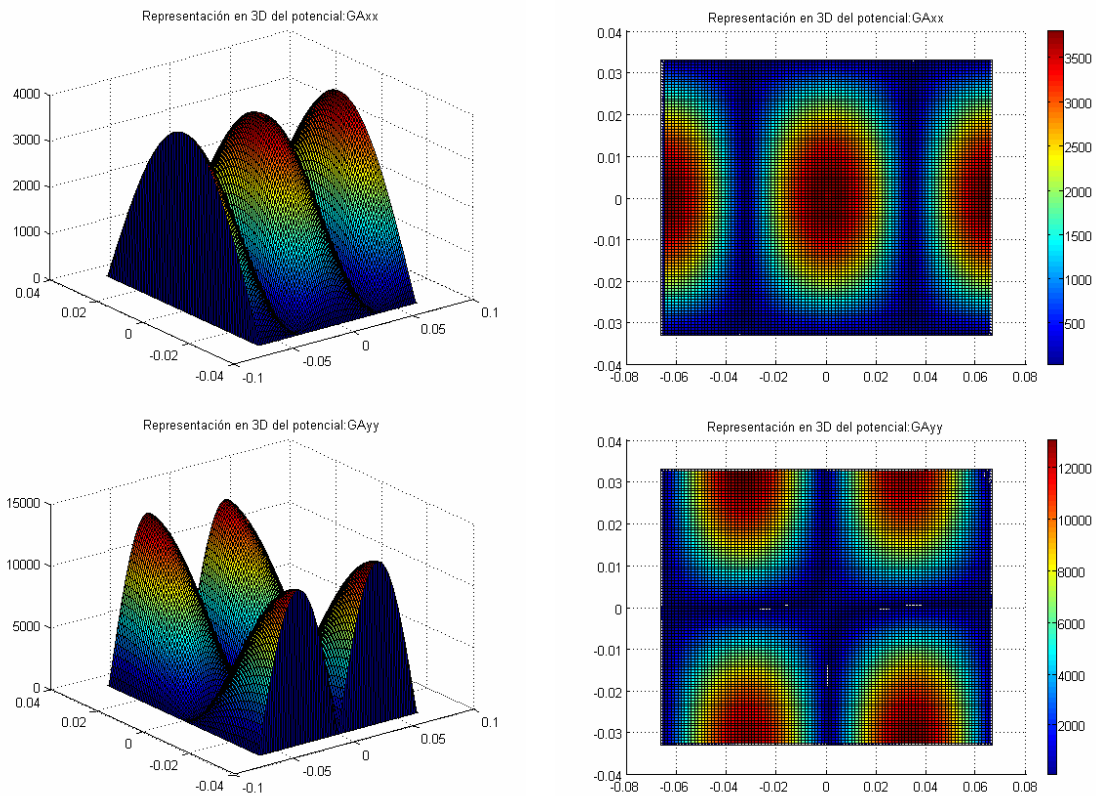


Figura 6.4 Potenciales en la segunda resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm.
Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

De esta forma comprobamos como los resultados obtenidos son válidos, apareciendo las resonancias esperadas. Destacar que se han excitado resonancias en todos los potenciales, no sólo en el escalar como inicialmente buscábamos.

Por último y para terminar con el análisis de esta guía, vamos a mostrar los resultados en una tercera resonancia. Para ello excitaremos el modo 311 a una frecuencia de 6.458 Ghz:

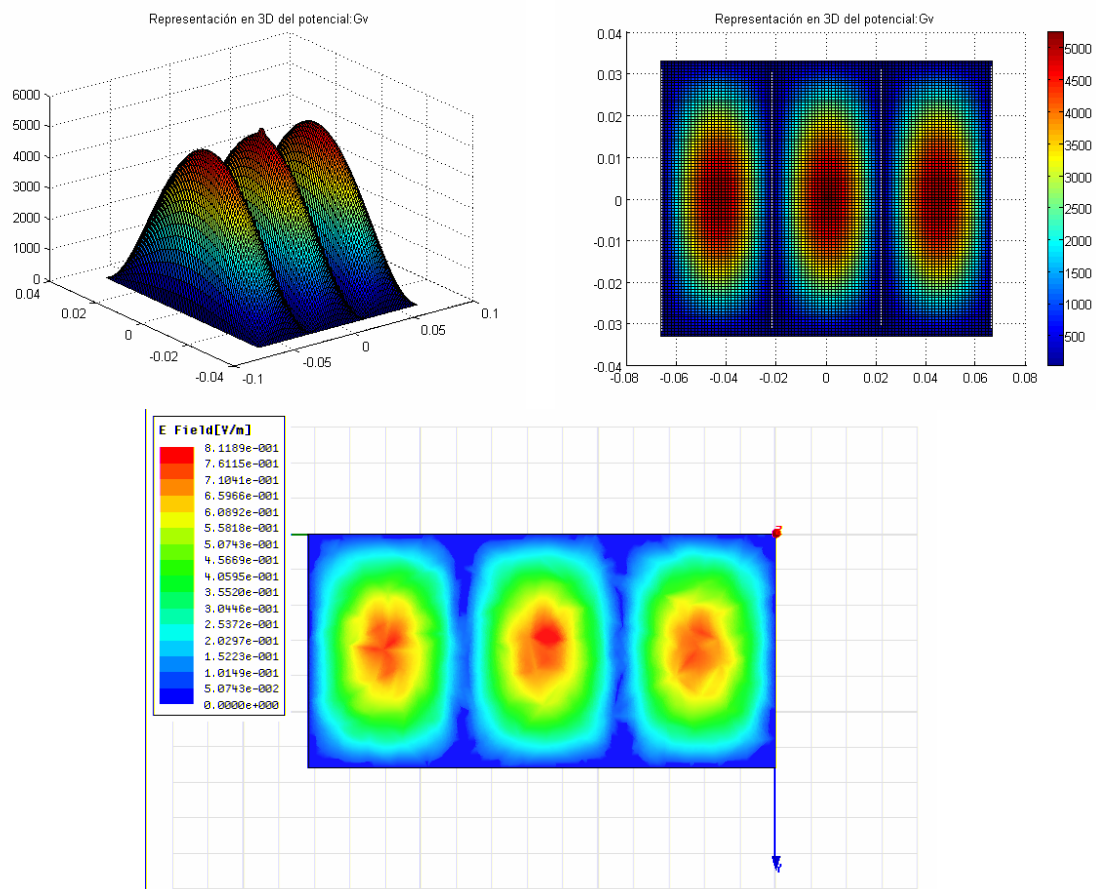


Figura 6.5 Potenciales en la tercera resonancia de la cavidad rectangular 132x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Comprobamos como aparecen las resonancias tal y como esperábamos, verificándose el comportamiento previsto por HFSS©. No vamos a mostrar ningún estudio adicional de convergencia de los resultados, pues ésta se consigue de manera natural, necesitando un número relativamente reducido de imágenes (25-30) y manteniéndose los resultados en distintas ubicaciones de las mismas.

De esta forma podemos dar por válidos los resultados, pues el método ha sido capaz de obtener con una gran precisión las frecuencias de resonancia de la cavidad y ha obtenido unos potenciales en el interior de la guía cuya distribución hemos validado con HFSS©.

6.3 Guía triangular

En este apartado vamos a analizar una guía triangular de altura 30mm y con una geometría en 2D mostrada en la figura 6.6, empleando para ello un número muy reducido de imágenes, tan sólo 30.

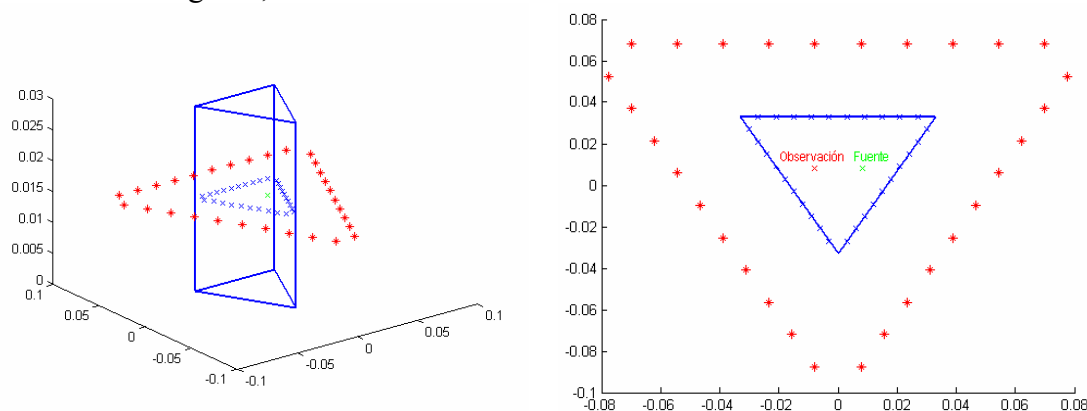


Figura 6.6 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía triangular de altura 30mm, empleo de 30 imágenes situadas a 12mm.

En primer lugar, al igual que en el apartado anterior, realizaremos un barrido en frecuencia con el fin de encontrar las resonancias de la cavidad. Para ello, fijaremos un punto de observación en la posición (-5,0,15)mm y la fuente puntual en (5,0,15)mm y realizaremos un barrido frecuencial, evaluando los potenciales obtenidos en ese punto.

A diferencia de lo que ocurría con las guías cuadrada y rectangular, no existe un método analítico general que nos permita obtener las frecuencias de resonancia y potenciales en el interior de una guía triangular. Si que existe diversa literatura sobre algunos tipos de guías triangulares (que empleen triángulos isósceles, rectángulos, etc), como pueden ser los estudios presentados en [19] y [20].

Así, tras obtener las frecuencias de resonancia mediante el método de las imágenes espaciales, emplearemos HFSS© para su validación. Cabe destacar que este software plantea la situación como un problema de autovalores, sin distinguir los modos que tienen en cuenta la altura de la guía (eje 'z') y los modos que consideran la guía triangular como infinita en altura (sin considerar por tanto el eje 'z').

Los resultados obtenidos tras el barrido frecuencial son los siguientes:

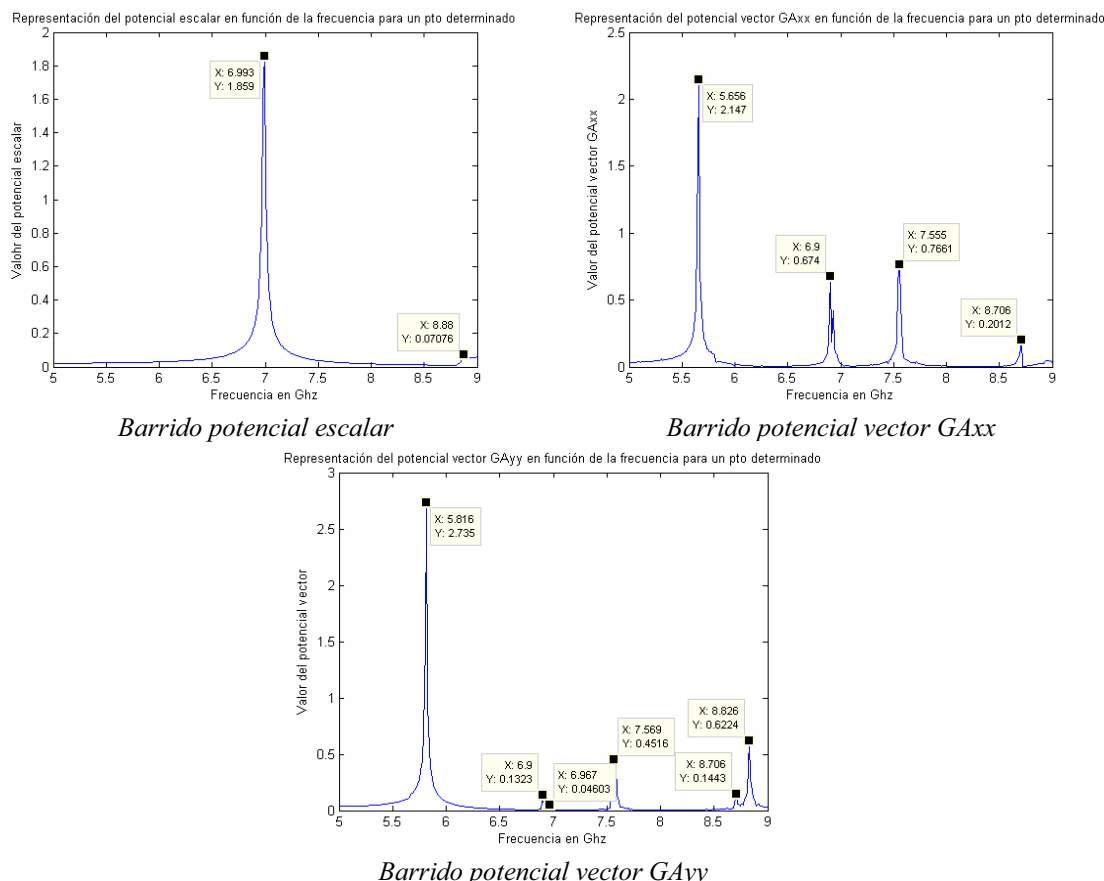


Figura 6.7 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía triangular de altura 30mm, al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.

Destacamos en este punto que, a diferencia de las guías cuadrada y rectangular, las componentes de los potenciales cruzados (GA_{yx} y GA_{xy}) no se anulan (debido a la influencia de los tramos oblicuos), por lo que un barrido frecuencia de estas componentes también desvelará la situación de las resonancias (además combinando información de los potenciales GA_{xx} y GA_{yy}). Realizando este barrido obtenemos:

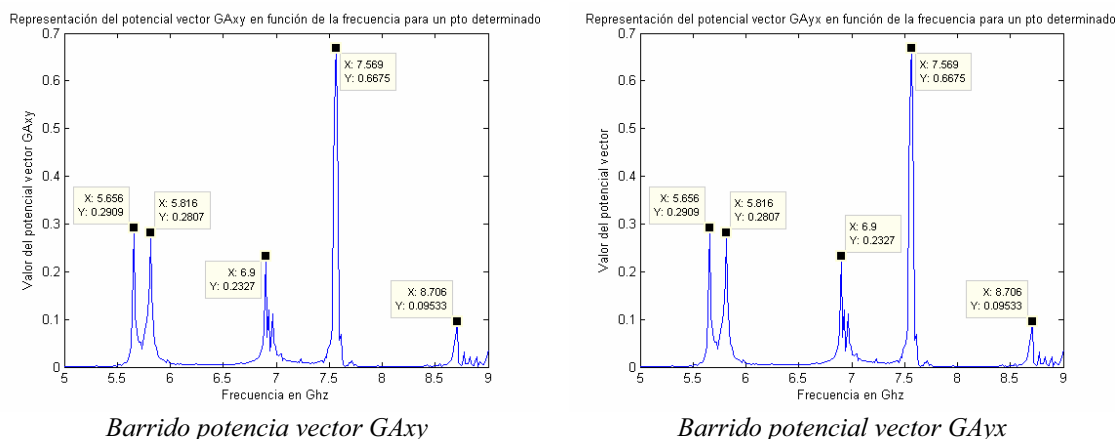


Figura 6.8 Evaluación de los potenciales cruzados en un punto fijo en el interior de una guía triangular de altura 30mm, al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.

Tras obtener las resonancia, vamos a realizar una comparación entre las frecuencias obtenidas y las proporcionadas por HFSS© con el fin de ver la precisión que conseguimos con el método de las imágenes espaciales.

<i>Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
5.6602	5.656	0.0042	0.074
5.8166	5.816	0.0002	0.010
6.9139	6.9	0.0139	0.201
6.9935	6.993	0.0005	0.0071
7.5622	7.569	0.0068	0.0899
8.6966	8.706	0.0094	0.1080
8.8685	8.88	0.0115	0.1296

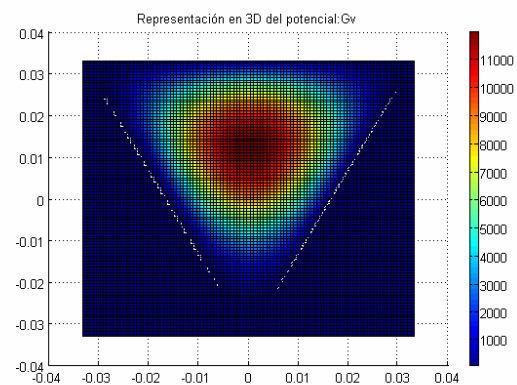
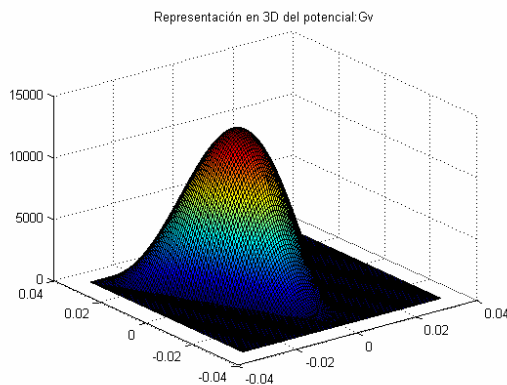
Tabla 6.3 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rectangular de 132x66x30mm.

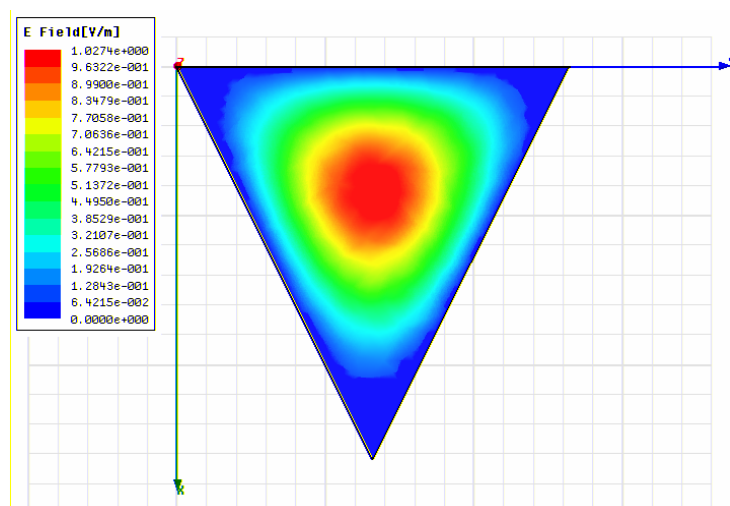
Por lo general obtenemos una concordancia total de las frecuencias de resonancia halladas con las proporcionadas por HFSS©, siendo la máxima diferencia relativa del orden 0.2%. También indicar que el software comercial no es totalmente exacto en este cálculo, pues depende de la precisión que se le haya indicado (consumiendo enormes recursos computacionales); es por ello que estos cálculos se han realizado con un nivel de precisión medio. En cuanto al método de las imágenes espaciales, también es posible aumentar su resolución disminuyendo el paso entre los distintos puntos frecuenciales, con el consiguiente aumento del coste computacional.

Destacamos la existencia de pequeñas variaciones en el interior de una misma resonancia, como puede ser en el caso de la resonancia a 8.88Ghz obtenida en el potencial escalar que aparece a 8.826 Ghz en el potencial vector GAyy.

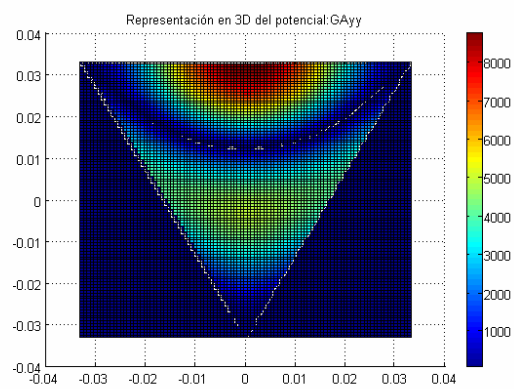
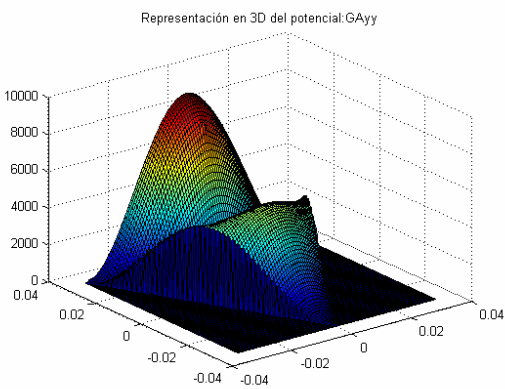
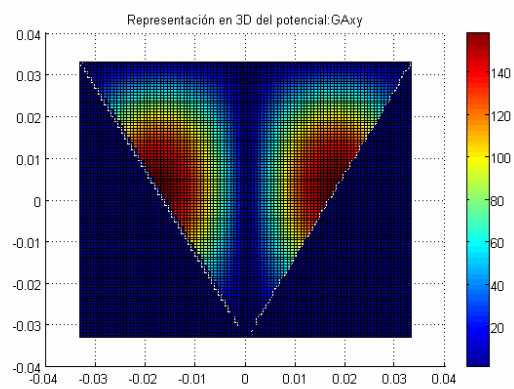
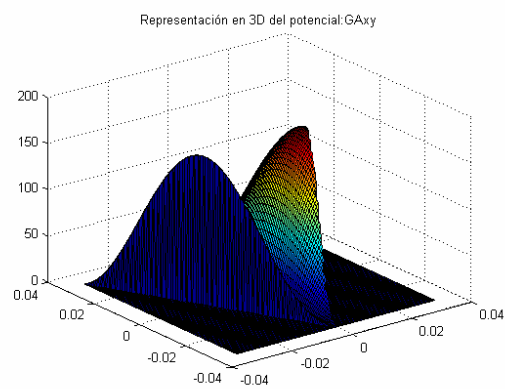
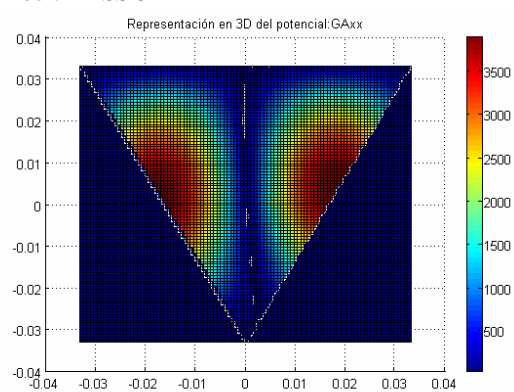
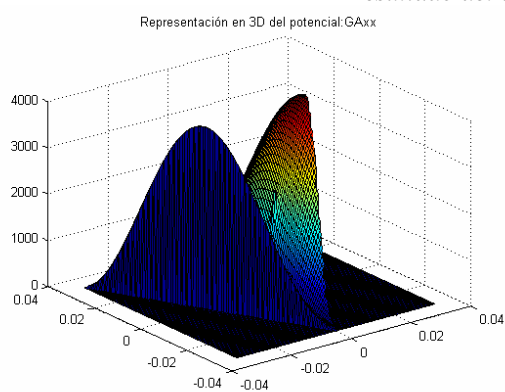
A continuación, vamos a mostrar los potenciales en el interior de la guía en distintas frecuencias de resonancia, comparando el potencial escalar con el campo eléctrico E_z (en los modos TM) tal y como realizamos en casos anteriores.

Mostraremos en primer lugar los potenciales y el campo E_z en la frecuencia de resonancia del modo 1 (6.993 Ghz). Comentar que al aparecer tramos oblicuos las componentes del potencial vector cruzadas (GAyx y GAxxy) ya no se anulan, y también presentan resonancia (aunque obviamente con unos valores muy reducidos).





Resultado del campo E con HFSS©



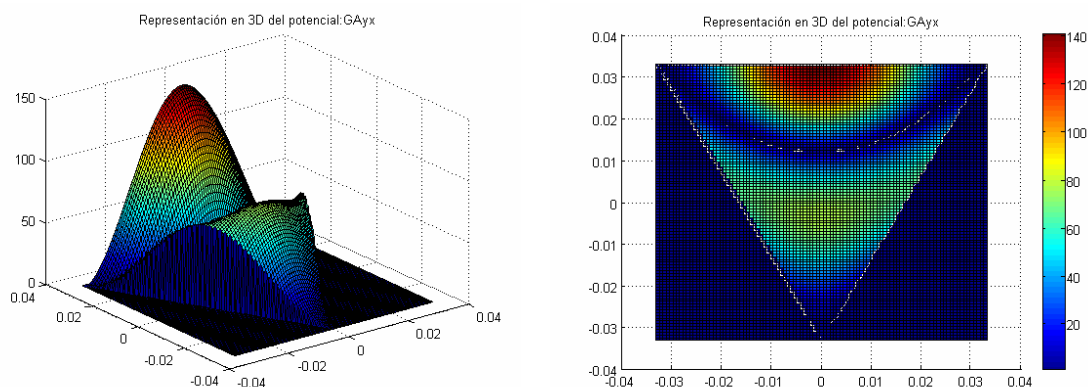
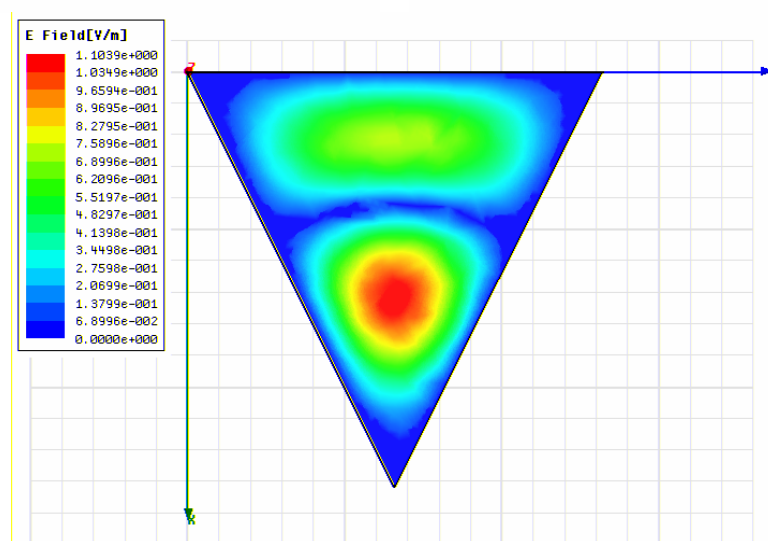
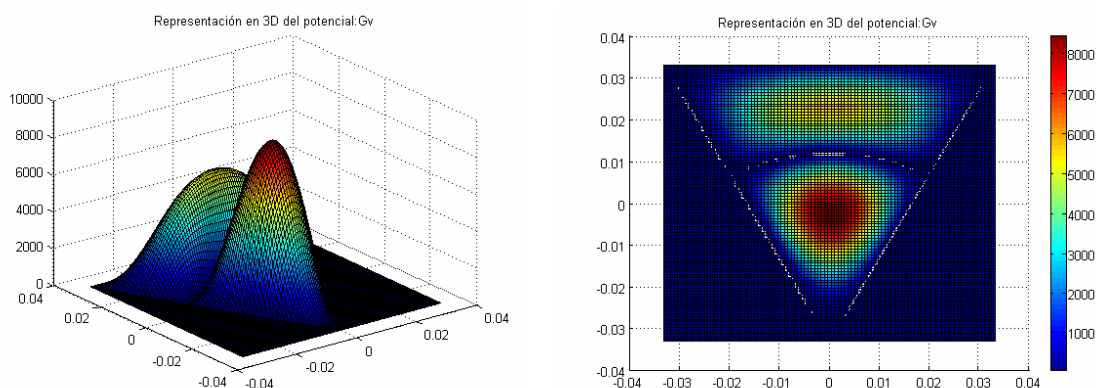


Figura 6.9 Potenciales en la primera resonancia de una cavidad triangular con 30mm de altura. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos como aparece una resonancia en el potencial escalar, coincidiendo en forma con el campo eléctrico calculado por HFSS ©. De esta forma, los resultados son validados.

Al igual que hemos encontrado la primera resonancia, el resto de las mismas aparecen al calcular los potenciales a su frecuencia característica. Por ejemplo, la segunda resonancia, la encontramos a la frecuencia de 8.88 Ghz. Vemos en la figura 6.10 que esta resonancia es del tipo 121, pues presenta una única variación el eje 'x' y dos en el eje 'y'.



Resultado del campo E con HFSS©

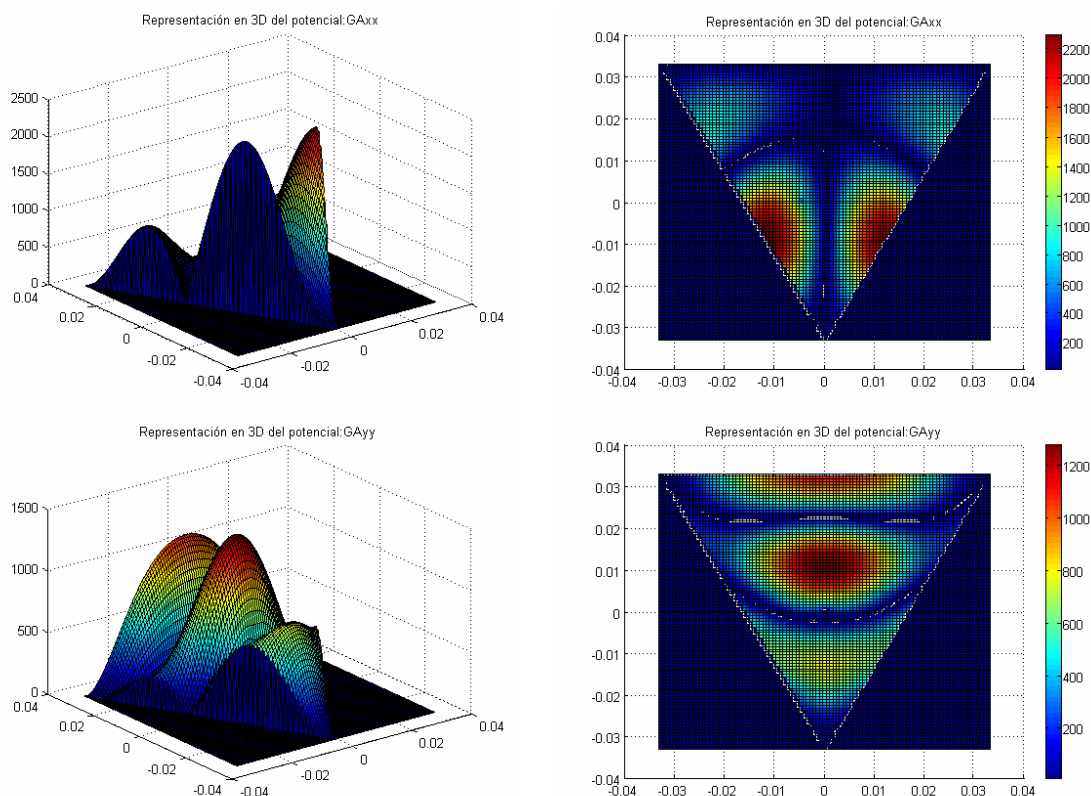


Figura 6.10 Potenciales en la segunda resonancia de una cavidad triangular con 30mm de altura. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Comprobamos como aparecen las resonancias tal y como esperábamos, verificándose el comportamiento previsto por HFSS©. Vemos que el método ha proporcionado unos potenciales adecuados, con un número de imágenes espaciales muy reducido (tan solo 30). No presentaremos estudios adicionales de convergencia, pues ésta se mantiene con el número de imágenes y de una forma muy robusta con la posición de las mismas alrededor de la guía.

Añadir que la presencia de las componentes cruzadas es debida a los tramos oblicuos, ya que un dipolo orientado en 'x' ó en 'y' en el interior de la guía triangular tendrá componentes tanto en 'x' como en 'y'. Físicamente, es debido a los tramos oblicuos, y matemáticamente se ha modelado ubicando dos dipolos imagen por cada punto tangente de contorno: uno orientado en 'x' y el otro en 'y'. Es la misma situación que ocurría en las guías cilíndricas, y que se repite en otras muchas.

De esta forma podemos dar por válidos los resultados, pues el método ha sido capaz de obtener con una gran precisión las frecuencias de resonancia de la cavidad y ha obtenido unos potenciales en el interior de la guía cuya distribución hemos validado con HFSS©.

6.4 Guía rombo con ángulos internos a 90°

En este apartado vamos a analizar una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm, y con sus cuatro ángulos internos rectos. Esta guía equivale a rotar 90° la guía cuadrada analizada en el capítulo 5, no obstante el análisis y los resultados no serán equivalentes. En primer lugar, aparecen tramos oblicuos lo que fuerza físicamente la presencia de los potenciales vector cruzado (debido al ángulo que se forma), y en

segundo lugar para que fueran equivalente deberíamos rotar también la ubicación de la carga/dipolo fuente situado en su interior (y no situarlos en el eje X e Y).

De esta manera aparecerán diferencias respecto al análisis de la guía cuadrada tanto en las frecuencias de corte encontradas como en la visualización de los potenciales obtenidos.

La situación que estamos analizando, al emplear un total de 60 imágenes, es la siguiente:

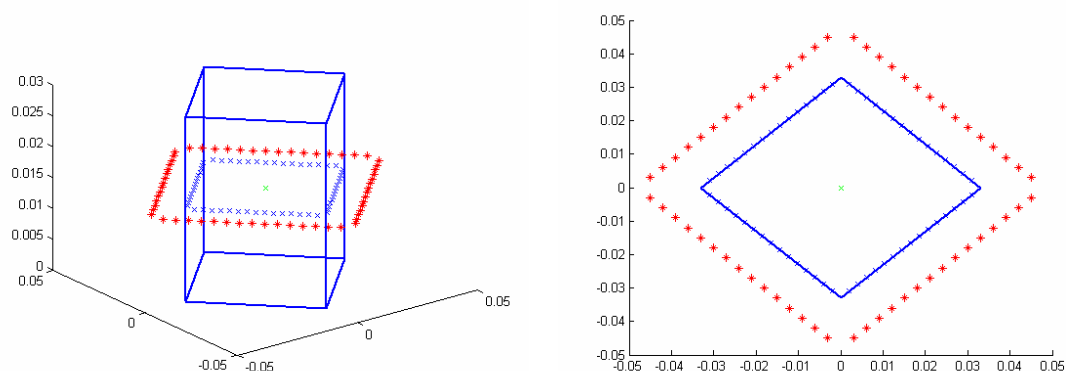


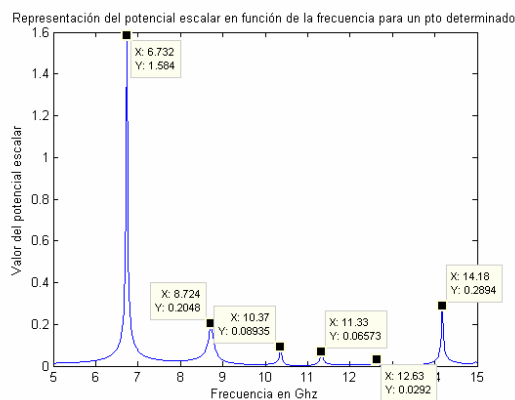
Figura 6.11 Situación de la fuente y un punto de observación en el interior de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm y sus 4 ángulos internos a 90°. Empleo de 60 imágenes situadas a 12mm.

Calcularemos las frecuencias de resonancia mediante un barrido frecuencial, fijando para ello un punto fijo de observación en la posición (-15,0,15)mm y una fuente puntual en (15,0,15)mm y evaluando la evolución de los potenciales en ese punto.

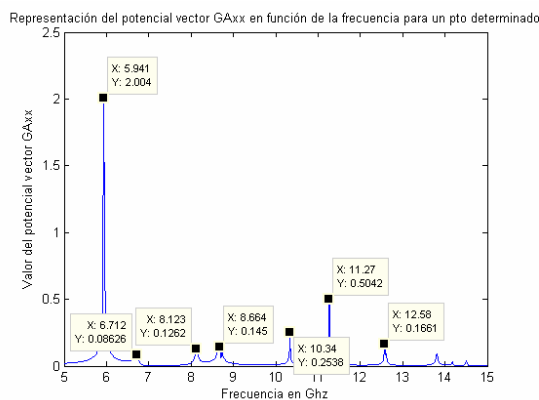
Posteriormente, compararemos las frecuencias de resonancia obtenida con las proporcionadas por el software comercial HFSS© para validar su resultado.

Tal y como ocurría con la guía triangular, la presencia de tramos oblicuos implica la aparición de los potenciales vector cruzados, por lo que también emplearemos la información proporcionada por estos a la hora de visualizar los potenciales.

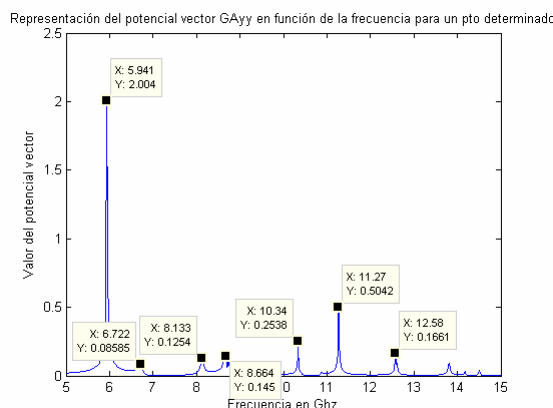
Realizaremos un barrido frecuencial muy amplio (entre 5 y 15 Ghz), con el fin de ubicar las distintas resonancias:



Barrido potencial escalar



Barrido potencial vector GAxx



Barrido potencial vector GAyy

Figura 6.12 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm al variar la frecuencia de 5 a 15.0 Ghz.

Tras obtener las resonancia, vamos a realizar una comparación entre algunas de las frecuencias obtenidas y las proporcionadas por HFSS© con el fin de ver la precisión que conseguimos con el método de las imágenes espaciales.

<i>Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
5.9384	5.941	0.0026	0.0437
6.7499	6.732	0.0179	0.2651
8.1315	8.133	0.0015	0.0184
8.738	8.724	0.014	0.1602
10.347	10.37	0.023	0.2222
11.277	11.27	0.007	0.0620

Tabla 6.4 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía rombo de 66x66x30mm, con sus cuadro ángulos internos a 90°.

Por lo general obtenemos una concordancia total de las frecuencias de resonancia halladas con las proporcionadas por HFSS©, siendo la máxima diferencia relativa del orden de 0.26%. En este apartado, las diferencias pueden ser debidas a imprecisiones de cualquier de los dos métodos (pues HFSS© tampoco es exacto del todo, al no poder realizar las simulaciones al máximo de precisión por el enorme coste computacional requerido).

Al igual que en casos anteriores, vuelven a aparecer pequeñas diferencias frecuenciales a la hora de excitar un mismo modo, por ejemplo la resonancia a 10.37Ghz del potencial escalar aparece a 10.34 en los potenciales vector.

A continuación, vamos a mostrar los potenciales en el interior de la guía en distintas frecuencias de resonancia, comparando el potencial escalar con el campo eléctrico E_z (en los modos TM) tal y como realizamos en otras guías.

Mostraremos en primer lugar los potenciales y el campo E_z en la frecuencia de resonancia del modo 1 (6.732 Ghz):

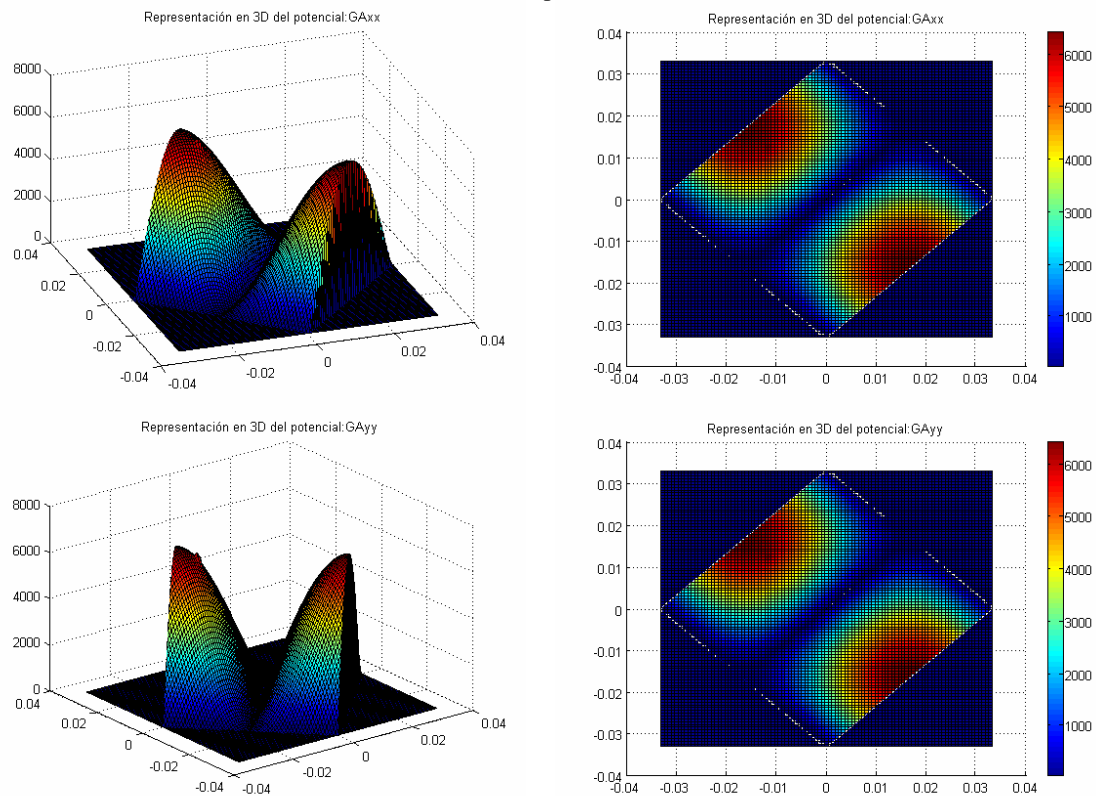
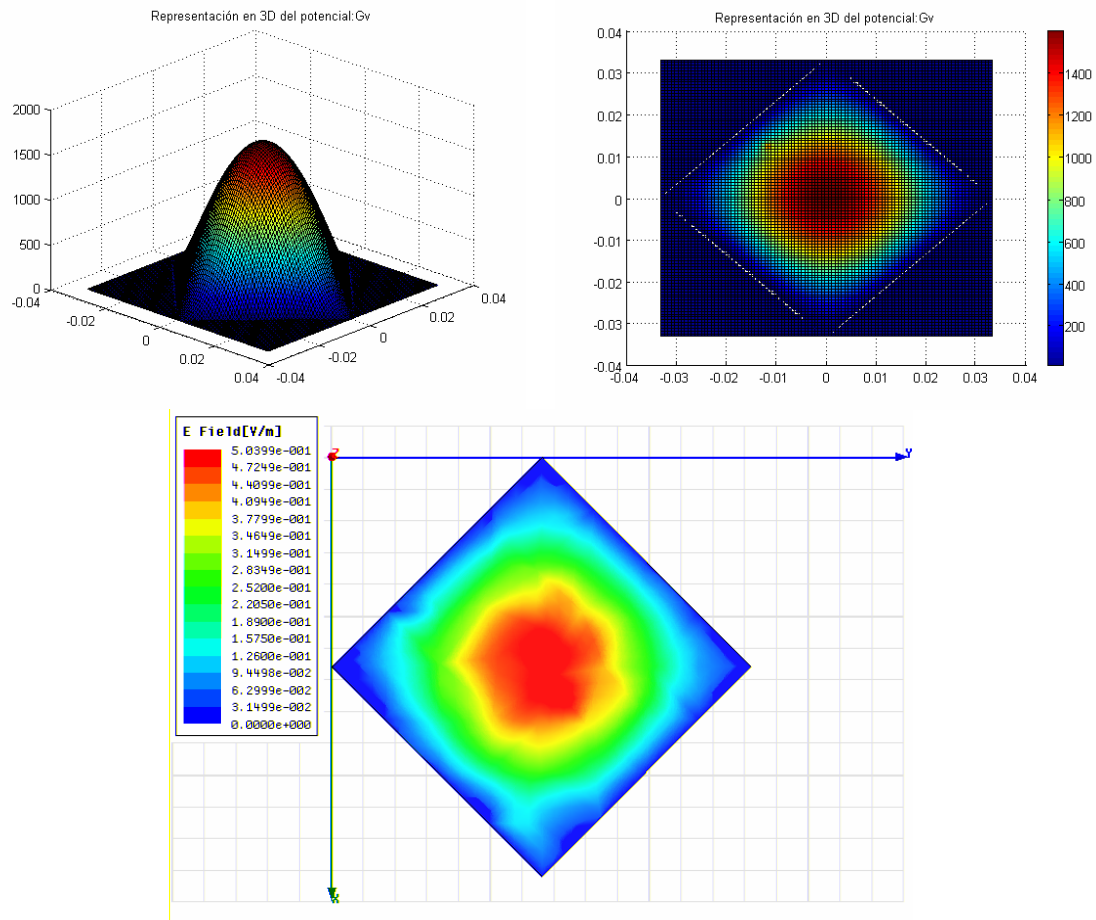


Figura 6.13 Potenciales en la primera resonancia de una cavidad rombo de dimensiones 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

En cuanto a los potenciales cruzados, obtenemos unos valores idénticos para las dos componentes (GA_{yx} y GA_{xy}):

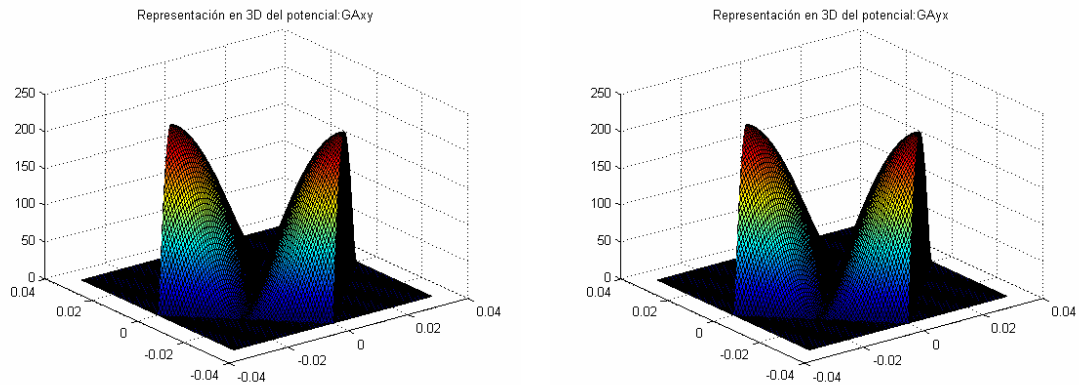


Figura 6.14 Potenciales cruzados en la primera resonancia de una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm.

Comprobamos como el potencial escalar concuerda de forma exacta con el campo E_z , validándose los resultados.

Mostraremos a continuación una resonancia a una frecuencia elevada (14.18 Ghz), para lo que será necesario emplear un sistema mínimo con 3 anillos debido a la elevada longitud eléctrica que adquiere la guía.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{14.18 \cdot 10^9} = 0.02027m \rightarrow Relacion = \frac{Altura}{\lambda} = \frac{0.03}{0.02027} = 1.48 \quad (6.2)$$

Así la situación a analizar ubicando los 3 anillos con 60 imágenes cada uno será la siguiente:

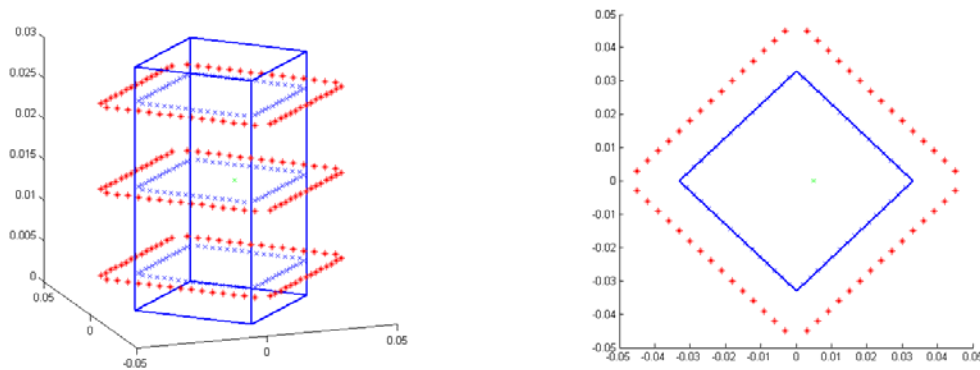
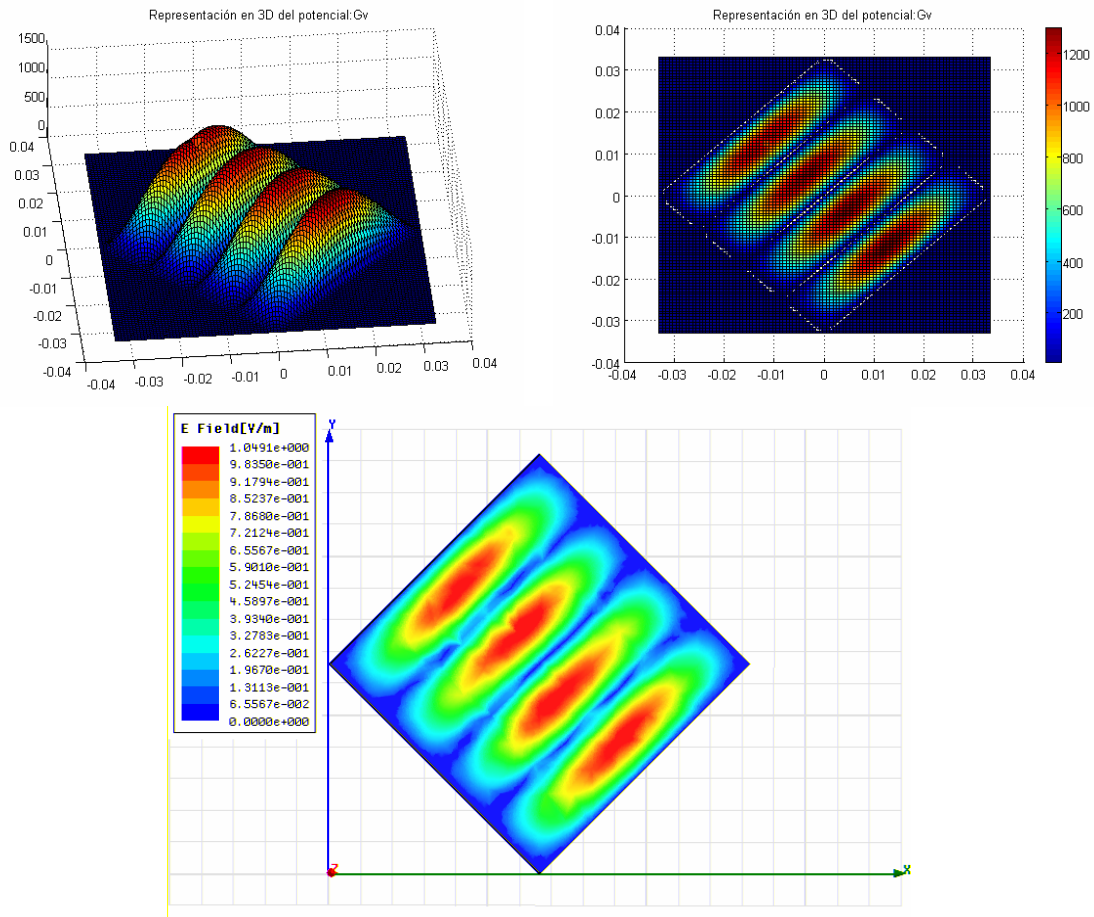


Figura 6.15 Situación de 3 anillos con 60 imágenes cada uno al analizar una guía rombo de dimensiones 66x66x30mm con sus 4 ángulos internos a 90°.

Comprobamos en la figura 6.16 como el aumento importante de la frecuencia hace que aumenten de forma considerables las variaciones de los potenciales en el interior de la cavidad.



Resultado del campo E con HFSS©

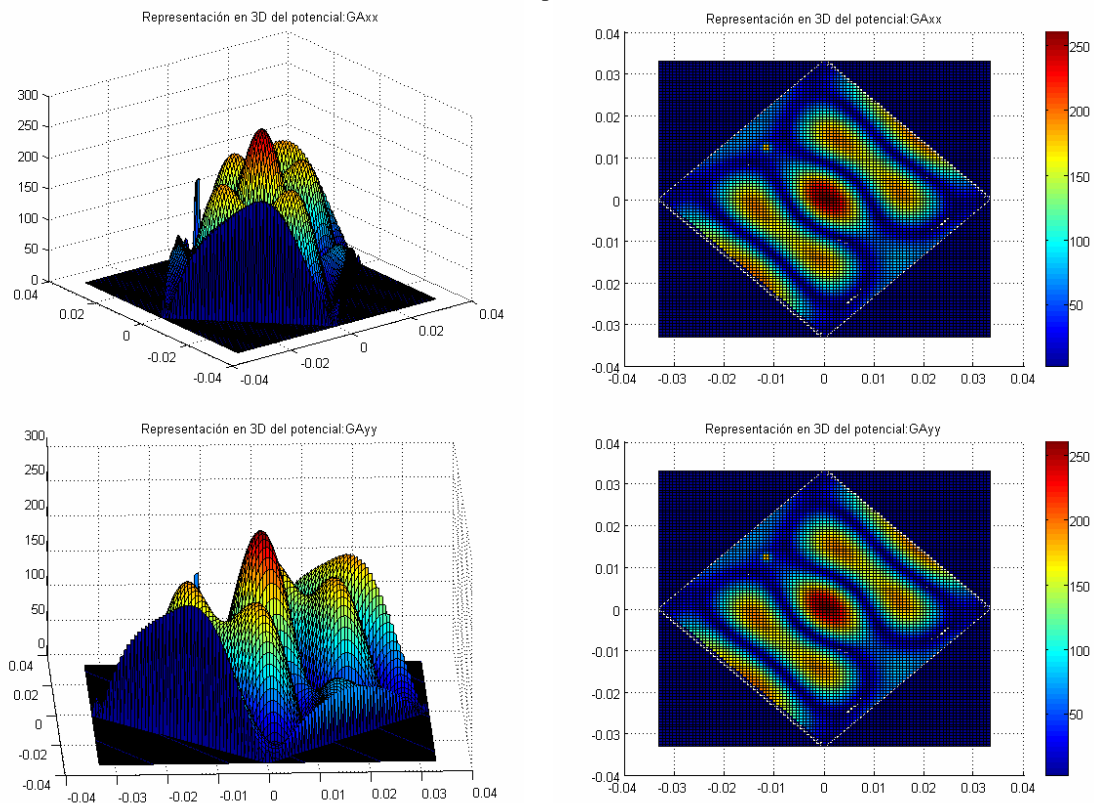


Figura 6.16 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 14.18Ghz de una cavidad rombo de dimensiones 66x66x30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

A pesar del aumento tan importante de la frecuencia, conseguimos una validación de los potenciales con HFSS©. Un estudio de la convergencia de esta guía en función de la separación de sus imágenes fue presentado en el capítulo 5, de tal forma que se presentó la robustez de esta guía frente a la posición de las imágenes. No se proponen estudios alternativos, debido a la rápida convergencia de resultados encontrados en la guía en todo tipo de situaciones.

De esta forma podemos dar por válidos los resultados, pues el método ha sido capaz de obtener con una gran precisión las frecuencias de resonancia de la cavidad y ha obtenido unos potenciales en el interior de la guía cuya distribución hemos validado con HFSS©.

6.5 Guía trapecio

En este apartado vamos a analizar una guía con forma trapecio, con una altura de 30mm. El lado mayor tendrá una longitud total de 66mm, 40mm tendrá el lado menor y una separación entre ambos de 66mm. Analizaremos la guía con un total de 60 imágenes distribuidas alrededor de la misma a una distancia de 12mm.

La situación que estamos analizando es la siguiente:

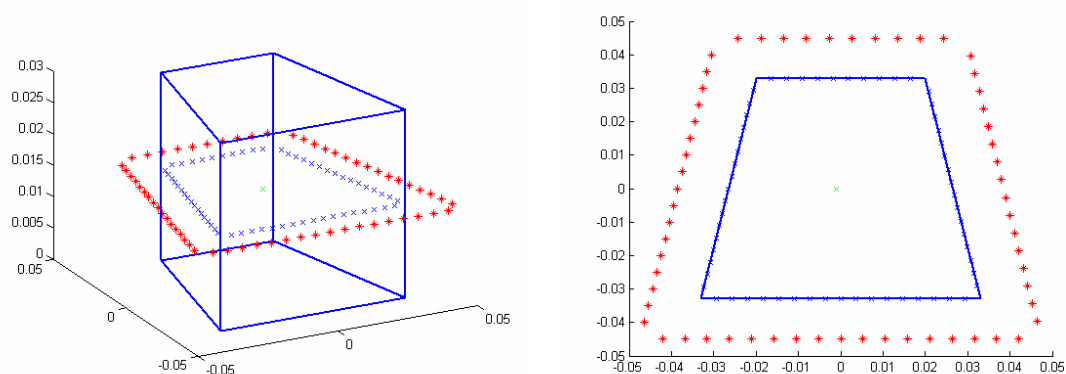


Figura 6.17 Situación de 1 anillo con 60 imágenes situados sobre una guía en forma de trapecio, de altura 30mm.

Observamos la combinación de tramos rectos con tramos oblicuos, por lo que al calcular los potenciales deberán de aparecer las componentes cruzadas.

Esta guía no tiene solución analítica, por lo que emplearemos otra vez HFSS© para validar las frecuencias de corte obtenidas así como la distribución de los potenciales calculados.

Para hallar las frecuencias de resonancia, emplearemos un punto fijo de observación situado en la ubicación (-15,0,15)mm y una fuente puntual situada en (15,0,15)mm. Evaluaremos la evolución de los potenciales en función de la frecuencia en este punto fijo. Al no conocer inicialmente la ubicación de las frecuencias de corte de los modos, realizaremos un barrido relativamente amplio (entre 4.5 y 9 Ghz), obteniendo en el mismo los siguientes resultados:

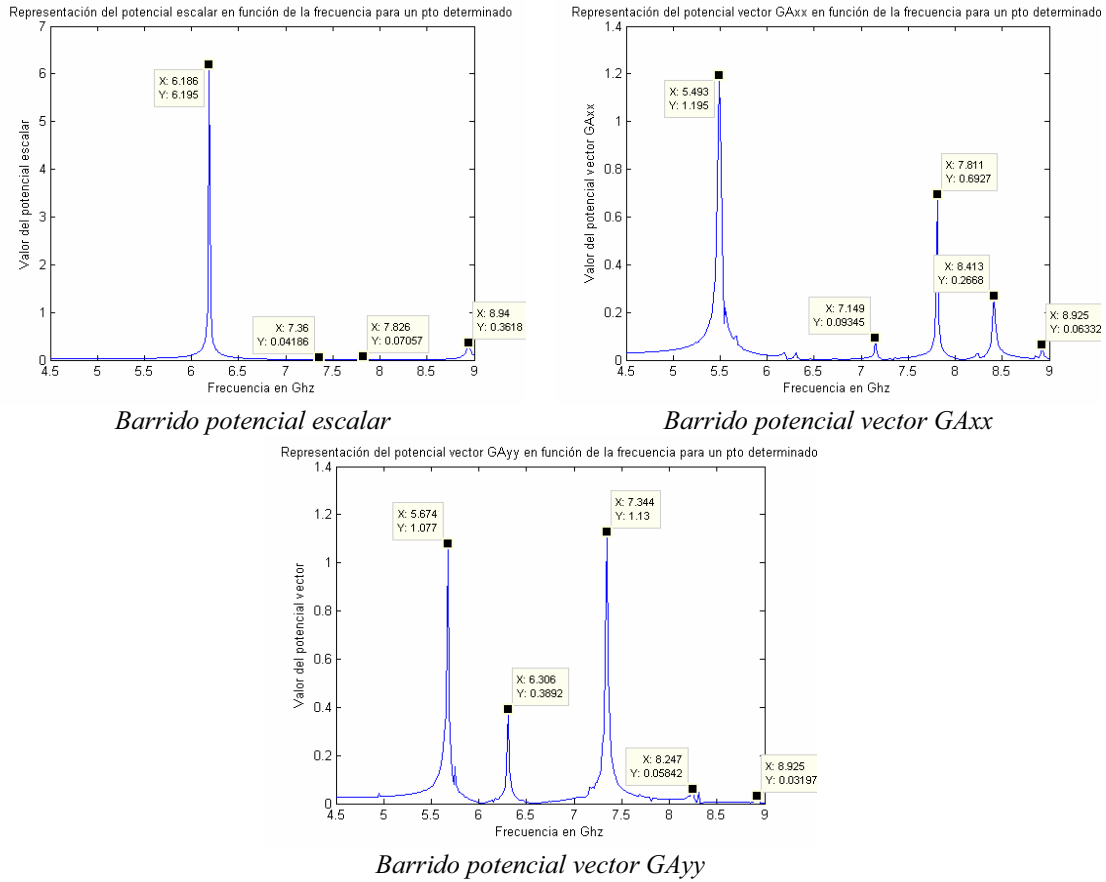


Figura 6.18 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía trapezoidal de altura 30mm al variar la frecuencia de 4.5 a 9.0 Ghz.

Tras obtener las resonancia, vamos a realizar una comparación entre algunas de las frecuencias obtenidas y las proporcionadas por HFSS© con el fin de ver la precisión que conseguimos con el método de las imágenes espaciales.

Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)	Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)	Error absoluto(Ghz)	Error relativo (%)
5.49	5.493	0.003	0.0546
5.6663	5.674	0.0077	0.1358
6.1868	6.186	0.0008	0.0129
6.3132	6.306	0.0072	0.1140
7.1531	7.149	0.0041	0.0573
7.3623	7.360	0.0023	0.0312
7.8266	7.826	0.0006	0.0076
8.2352	8.247	0.0118	0.1432
8.407	8.413	0.006	0.0713
8.9255	8.925	0.0004	0.0056

Tabla 6.5 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía trapecio de 30mm de altura

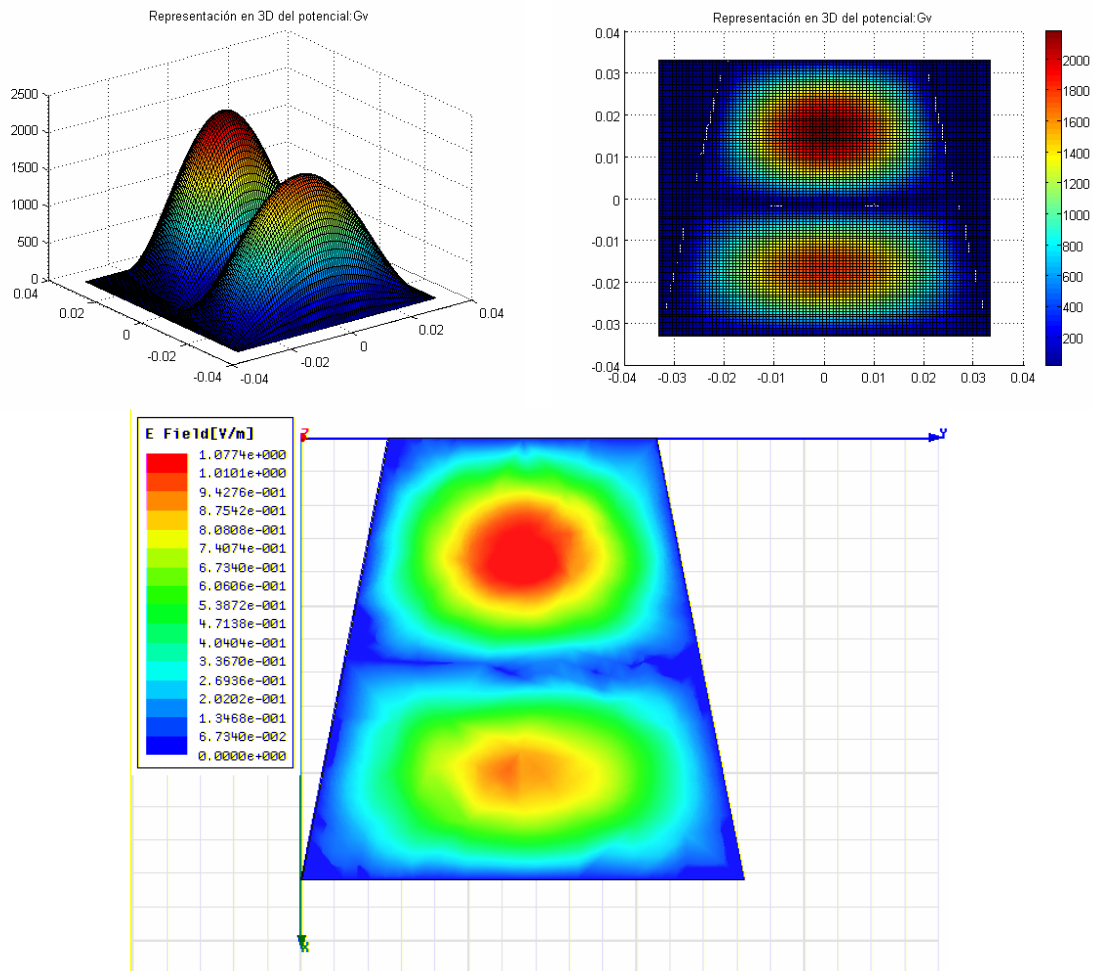
Observamos como las frecuencias obtenidas se corresponden con las obtenidas con el software HFSS©, existiendo diferencias mínimas entre los dos métodos.

Indicar que en el barrido, se producen pequeñas diferencias a la hora de obtener las resonancias en los distintos potenciales. Por ejemplo la resonancia a 7.826Ghz (obtenida en el potencial escalar) engloba a la existente en la frecuencia 7.811Ghz (obtenida en el potencial vector GA_{xx}) y la 8.925Ghz (obtenida en el potencial vector GA_{xx} y GA_{yy}) engloba a la obtenida en la frecuencia 8.94Ghz.

Mostraremos los potenciales en el interior de la guía trapezoidal, al igual que se ha realizado en los casos anteriores, verificando la distribución de los potenciales con el campo eléctrico E_z obtenido con HFSS©.

Debido a que la primera resonancia ya la hemos mostrado en otras guías, visualizaremos en primer lugar la segunda resonancia, situada a la frecuencia de 7.36Ghz. Gráficamente se comprueba que se trata de un modo 121, pues presenta una única variación en el eje 'x' y dos variaciones en el eje 'y'. Las componentes cruzadas existen y presenta un valor en resonancia más reducido que los potenciales vector GA_{xx} y GA_{yy} . No obstante su distribución en la guía coincide con:

$$\begin{aligned} \text{Distribución } GA_{xx} &= \text{Distribución } GA_{xy} \\ \text{Distribución } GA_{yy} &= \text{Distribución } GA_{yx} \end{aligned}$$



Resultado del campo E con HFSS©

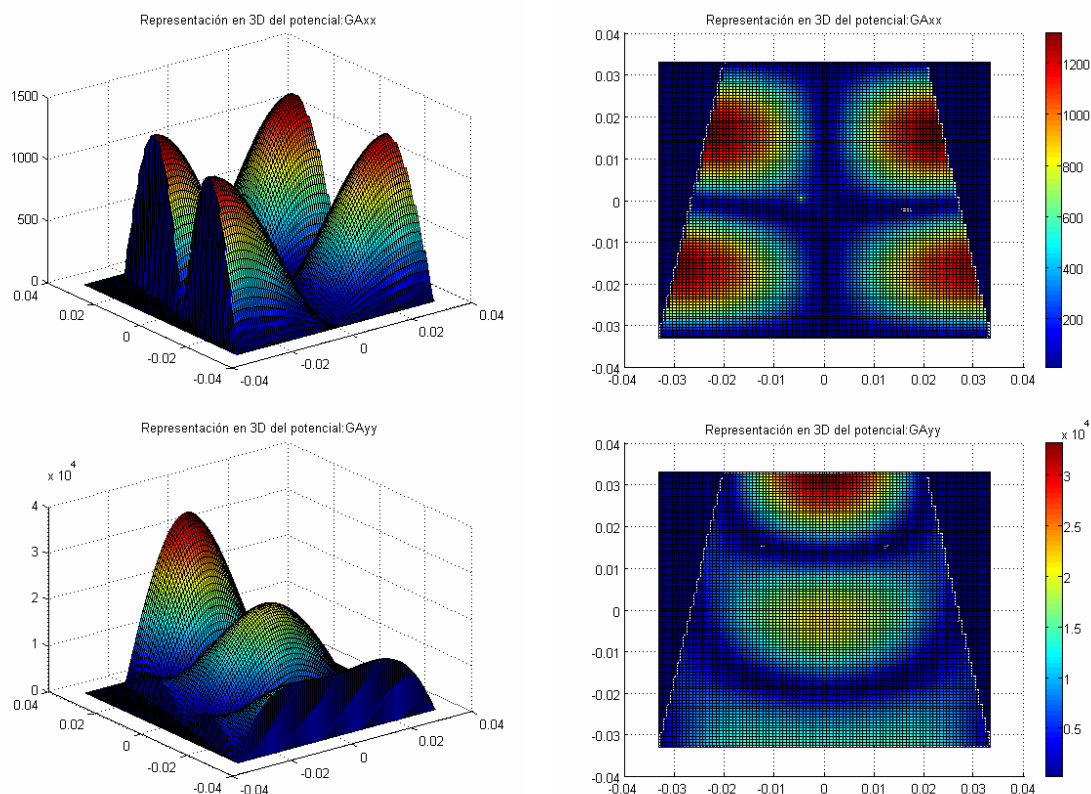
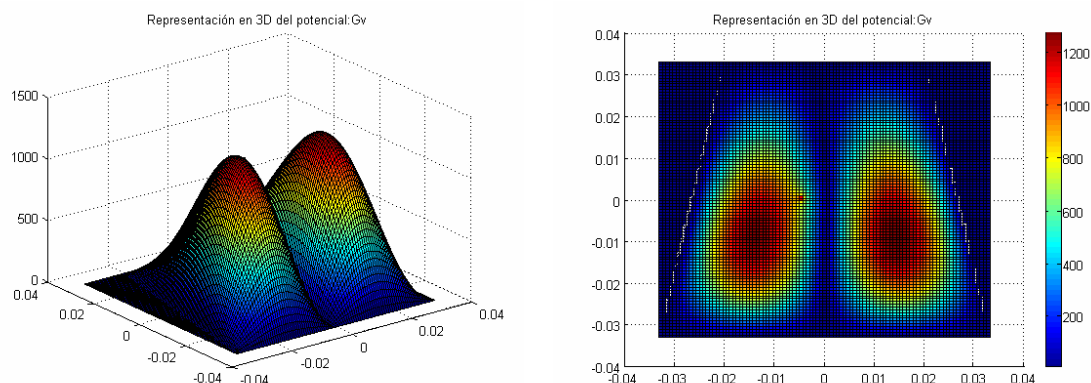


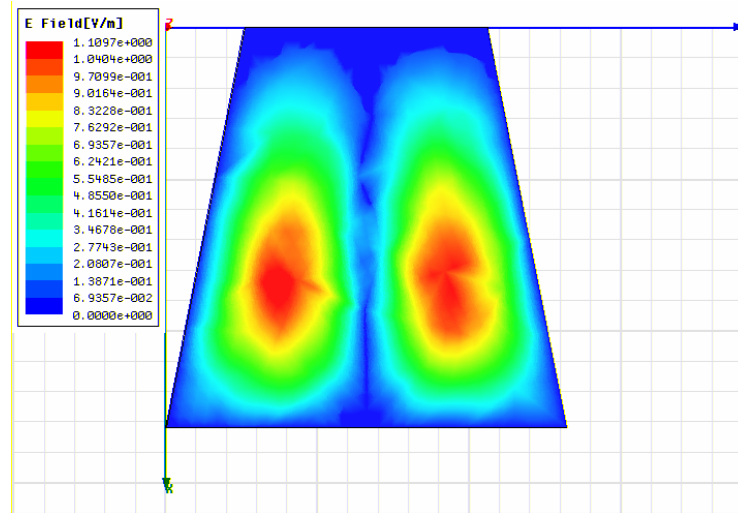
Figura 6.19 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.36Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS®.

Observamos claramente como la distribución del campo eléctrico coincide exactamente con la obtenida para el potencial escalar, validando al mismo.

En la figura 6.19 se comprueba claramente las diferencias entre los potenciales vector G_{Axx} (en el que ubicamos un dipolo fuente orientado en el eje 'x' en el centro de la guía trapezoidal) y el potencial G_{Ayy} (en el que ubicamos el dipolo fuente orientado en el eje 'y'). Las componentes cruzadas físicamente están provocadas por la presencia de tramos oblicuos en la guía, y son modeladas con la presencia de dipolos imagen orientados en el eje 'x' y en el eje 'y', mediante su combinación ponderada.

A continuación, mostraremos los potenciales en la frecuencia de resonancia de 7.826Ghz, que se corresponde con un modo 211 (tal y como se puede apreciar por sus variaciones en el potencial escalar):





Resultado del campo E con HFSS©

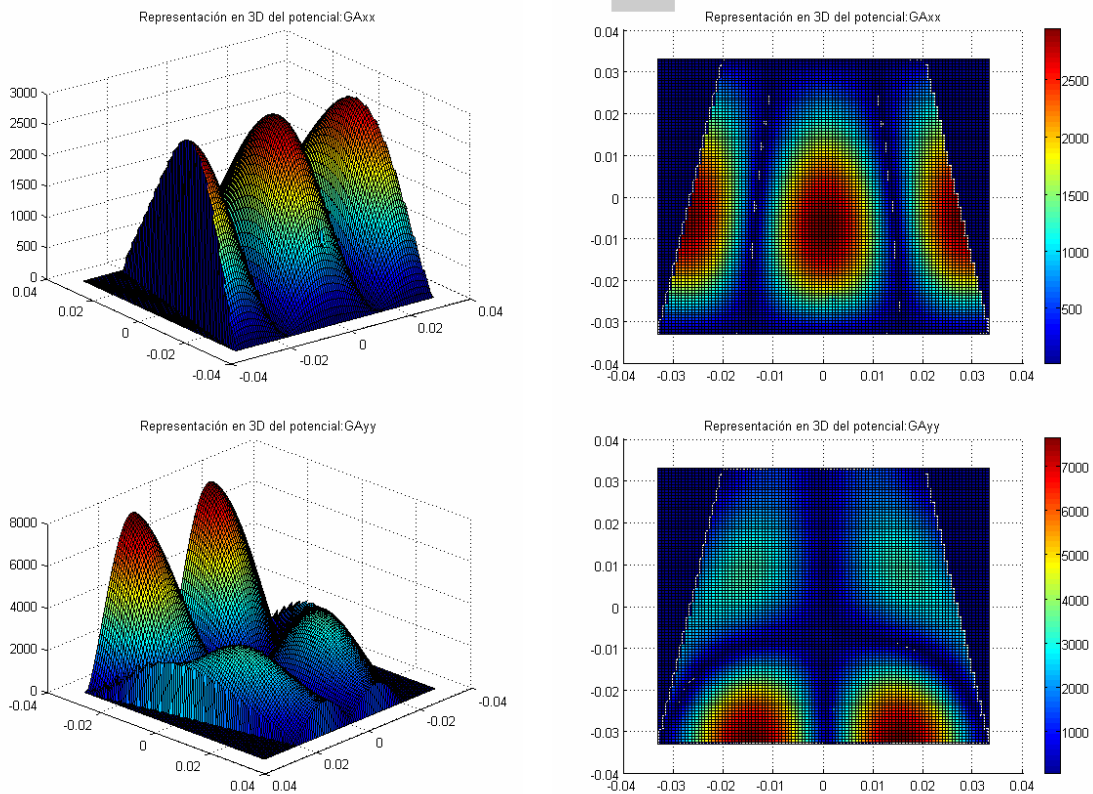
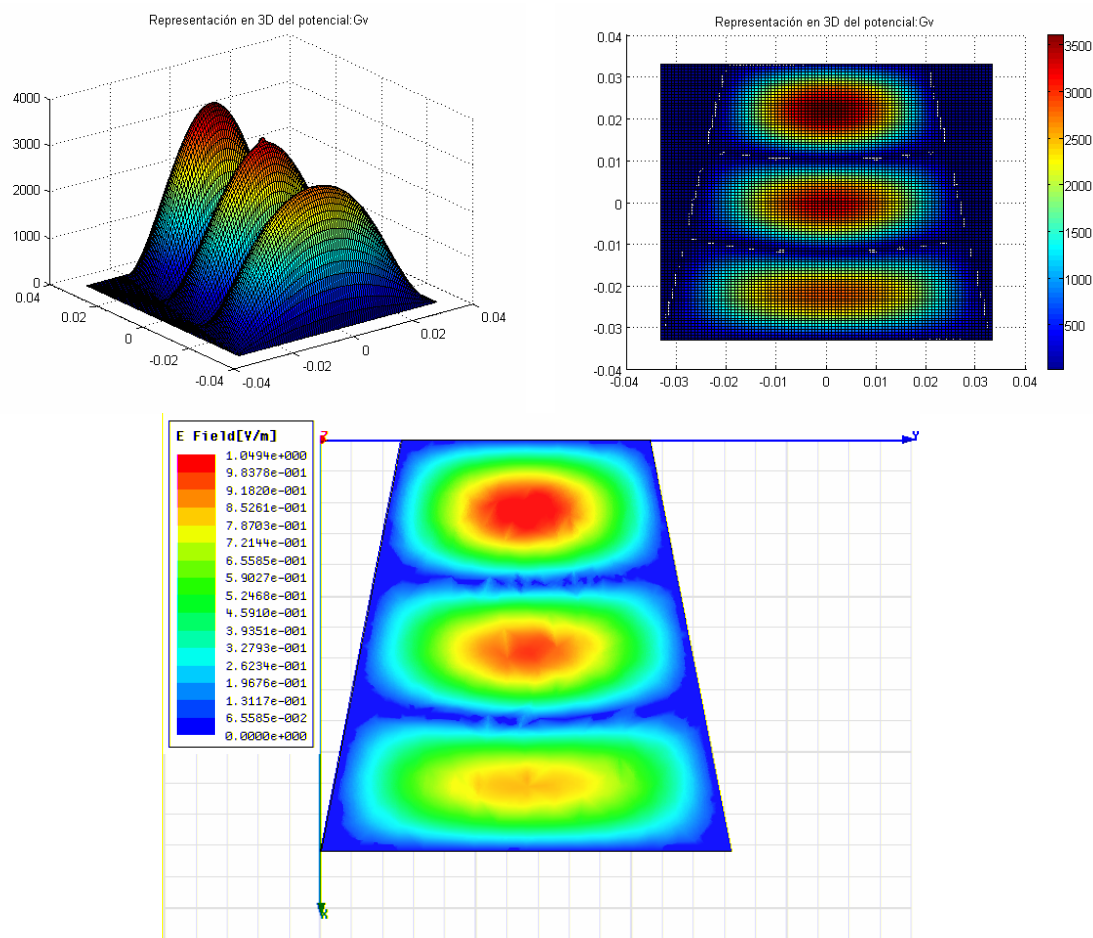


Figura 6.20 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.826Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos como se vuelve a validar la distribución del potencial escalar con la del campo eléctrico proporcionado por HFSS.

Por último, vamos a validar otra resonancia, concretamente la situada a una frecuencia de 8.94 Ghz y correspondiente con el modo 311. Visualizaremos en esta ocasión únicamente el potencial escalar y su validación mediante el campo eléctrico E_z proporcionado por HFSS©.



Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.21 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 8.94Ghz de una cavidad trapezoidal de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Como viene sucediendo hasta ahora, conseguimos una validación de la distribución del potencial escalar mediante el campo eléctrico dado por HFSS©.

Observamos como la convergencia en este guía se produce de una manera rápida y sin ningún tipo de complicaciones, por lo que no presentaremos ningún estudio adicional de convergencia.

Así, podremos concluir que los potenciales obtenidos por el método de las imágenes espaciales para esta guía son válidos, pues hemos realizado una validación tanto en la ubicación de las frecuencias de resonancia (con una gran precisión) como de la distribución del potencial escalar en el interior de la guía.

6.6 Guía dual (cuadrada con un corte)

Supongamos una guía dual inmersa en una estructura de 66x66x30mm, con un corte de 18x18mm. Partiremos del estudio de convergencia que sobre esta guía realizamos en el capítulo 5, en el que concluimos que la mejor ubicación de las imágenes encontrada era a una distancia de 5mm de la guía, siguiendo las variaciones de la misma. Con esta distribución, y empleando un número elevado de imágenes, 90, tenemos la siguiente situación:

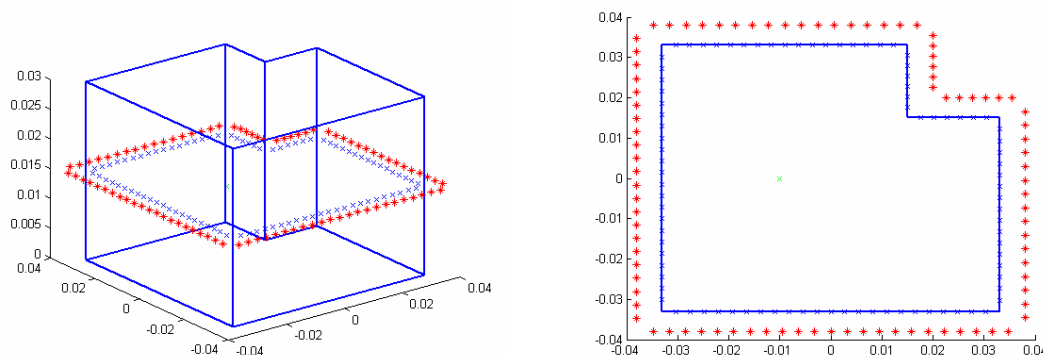


Figura 6.22 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18mm en su esquina superior derecha.

La situación que tenemos en este caso es diferente a la de las guías analizadas hasta ahora, debido a la falta de convergencia de los potenciales con una variación del número de imágenes o de las posiciones de la misma. Ello es debido a un error numérico producido en las esquinas adyacentes al entrante; la variación de este error en función de la ubicación de las imágenes y del número de las mismas hace imposible encontrar una situación estable.

No obstante, realizaremos un barrido en frecuencia sobre un punto fijo de la guía, con el fin de buscar posibles resonancias en la misma. Para ello, emplearemos las imágenes mostrada en la figura 6.22 con esa misma ubicación, situando la fuente en una ubicación de (-10,0,15)mm y la observación en (10,0,15)mm. Los resultados del barrido entre las frecuencias de 5 y 9 Ghz fueron los siguientes:

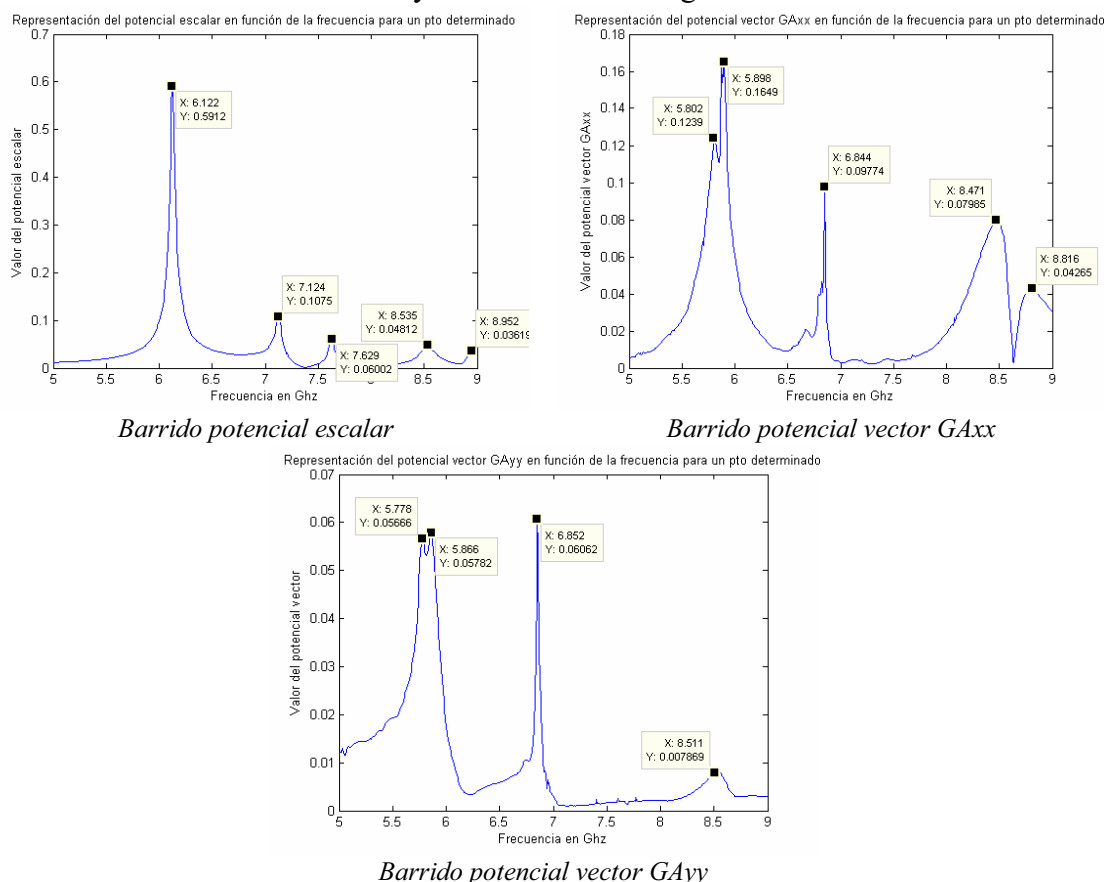


Figura 6.23 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía cuadrada de 66x66x30mm con un corte de 18x18 en una esquina, al variar la frecuencia de 4.5 a 9.0 Ghz.

Observamos como la respuesta del potencial escalar es mucho más clara y limpia que la del resto de potenciales; parece que el potencial vector es más sensibles cuando existen entrantes. No obstante, ello puede ser debido a una ubicación del punto de observación en la guía más favorable a las variaciones del potencial escalar que del potencial vector.

Tras realizar la simulación en HFSS© de esta estructura, compararemos las distintas resonancias encontradas pero separando las correspondientes al potencial escalar y al potencial vector. En primer lugar, veamos la precisión obtenida en el potencial escalar:

<i>Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
6.1414	6.122	0.0194	0.315
7.1083	7.124	0.0157	0.220
7.5929	7.629	0.0361	0.475
8.53515	8.535	0.0015	0.017
8.9939	8.952	0.0418	0.4647

Tabla 6.6 Precisión al obtener las resonancias el potencial escalar en una guía dual

Comprobamos como aparecen diferencias mayores que las del resto de guías, no obstante siguen siendo pequeñas y podemos dar por buenos los resultados.

En cuanto al barrido realizado por el potencial vector, tenemos los siguientes resultados:

<i>Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
6.0494	≈5.8	0.2494	4.122
6.8521	6.852	0.0001	0.0014
7.5929	7.629	0.0361	0.475
8.4802	8.471	0.0092	0.0170
8.8230	8.816	0.0070	0.0793

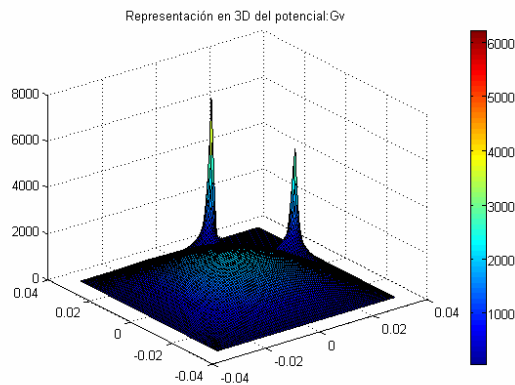
Tabla 6.7 Precisión al obtener las resonancias el potencial vector en una guía dual

En primer lugar destacar un error muy importante en la primera resonancia detectada por el potencial vector, concretamente a las frecuencias 5.778, 5.802, 5.866 y 5.989. Esas resonancias no han aparecido en el análisis realizado con HFSS© en esa posición y la primera resonancia que aparece está situada a 0.2Ghz de ellas.

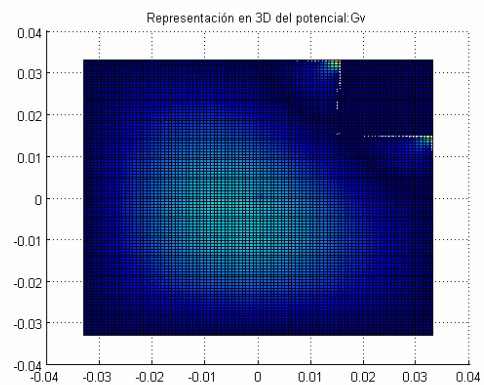
No obstante, el resto de resultados que hemos obtenido son aceptables, con un error máximo del 0.475%.

Vamos a realizar un pequeño estudio en la primera frecuencia de resonancia encontrada en el potencial escalar (6.122Ghz) en función del número de imágenes empleadas (60, 80, 90, 100, 105). De esta forma, observaremos la distribución del error numérico en “picos” que aparecen en las esquinas contiguas al entrante, y compararemos los distintos resultados con la distribución de potencial proporcionada por HFSS©.

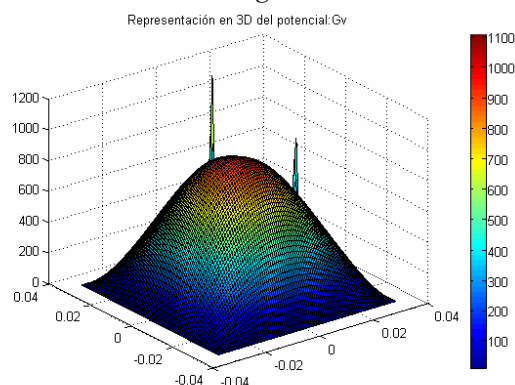
Así en función del número de imágenes, obtenemos:



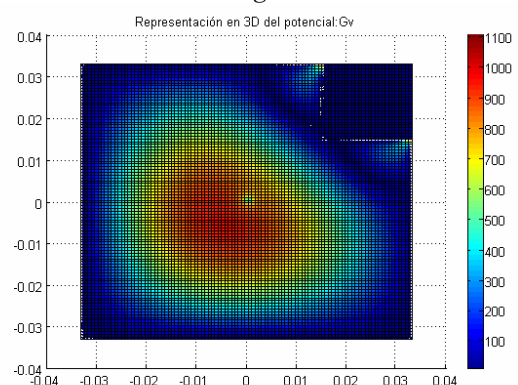
60 imágenes



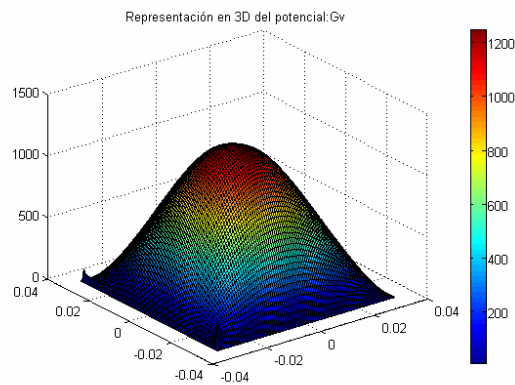
60 imágenes



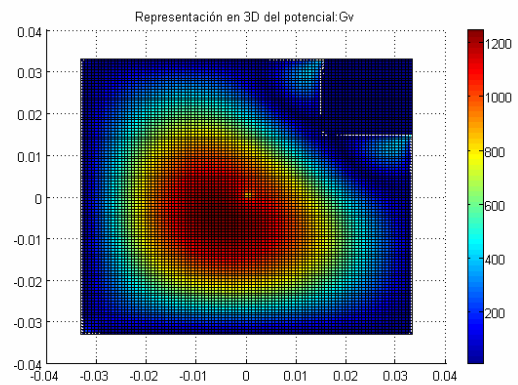
80 imágenes



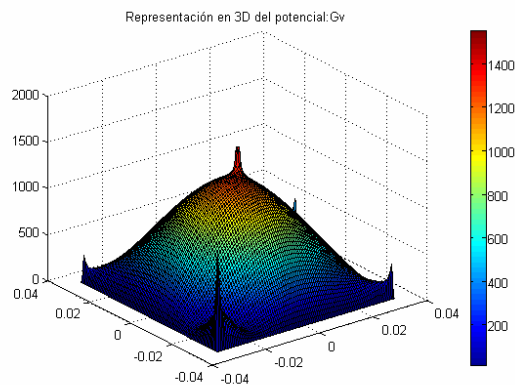
80 imágenes



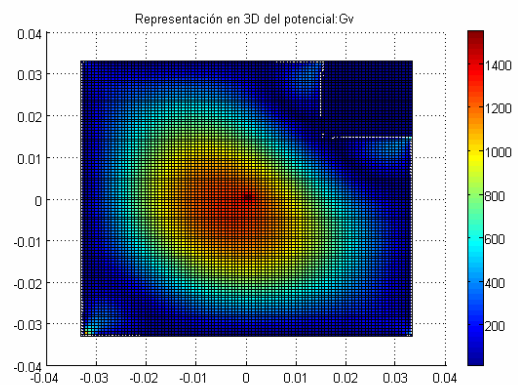
90 imágenes



90 imágenes



100 imágenes



100 imágenes

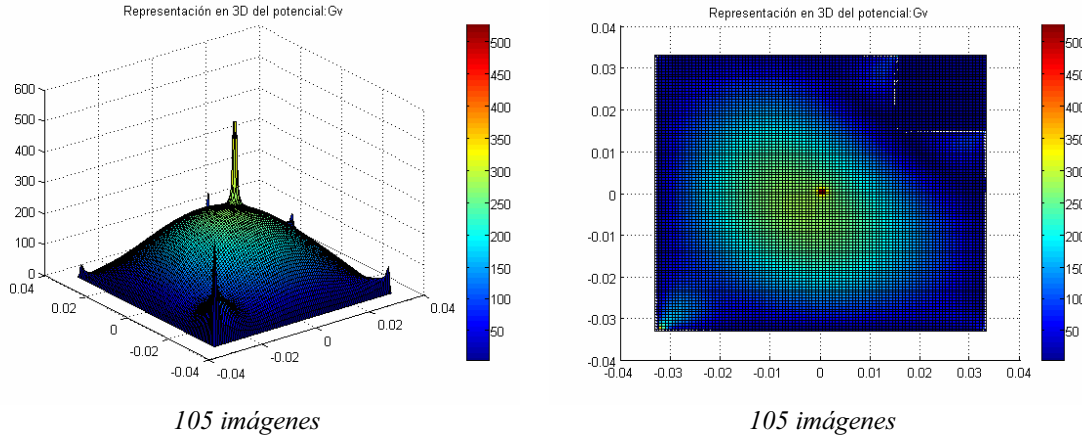


Figura 6.24 Potencial escalar en la primera resonancia en función del número de imágenes, guía cuadrada 66x66x30mm con un corte de 18x18 en su esquina superior derecha.

Comprobamos en primer lugar como al emplear 60 imágenes la resonancia apenas aparece, siendo el potencial en las esquinas debido al error numérico introducido muy superior a cualquier otro potencial en la guía. Al emplear 80 imágenes el error disminuye de forma significativa, aunque aun está presente y tiene un valor superior al de la resonancia, sin embargo está ya se aprecia de forma clara encontrándose el error muy localizado en las esquina. Con 90 imágenes, obtenemos la mejor representación del potencial escalar, ya que el error en las esquinas se encuentra muy disminuido y la resonancia aparece de forma clara. Al seguir aumentando todavía más el número de imágenes, vemos como vuelven a aparecer errores numéricos en las esquinas e incluso empieza a desaparecer la resonancia (con 105 imágenes) debido a que un sobredimensionamiento del número de puntos tangentes en la estructura conlleva a que posiciones distintas tengan un mismo valor (o valores muy parecidos), resultando el sistema incompatible o presentando una solución problemática, como es este caso.

La resonancia obtenida en el campo eléctrico E_z mediante HFSS© a esta frecuencia es la siguiente:

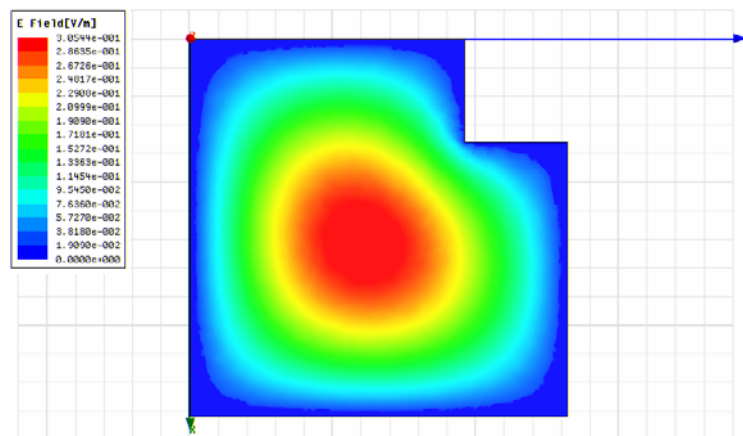
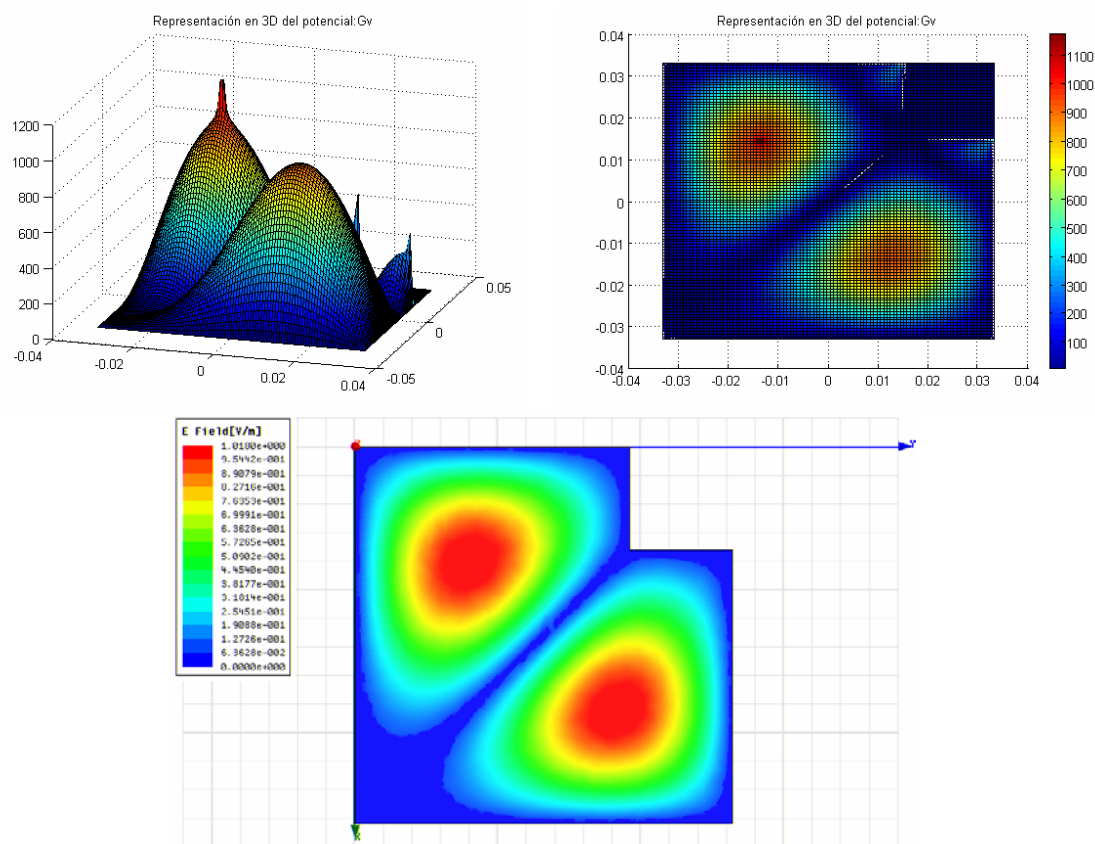


Figura 6.25 Campo eléctrico E_z obtenido en una guía dual en la primera resonancia, a 6.122Ghz.

Podemos comprobar como el resultado obtenido con 90 imágenes es muy similar al conseguido con HFSS©.

Empleando a partir de ahora esta configuración, 90 imágenes situadas a 5mm de la guía, vamos a representar el potencial escalar en la segunda resonancia, a una frecuencia de 7.125Ghz.

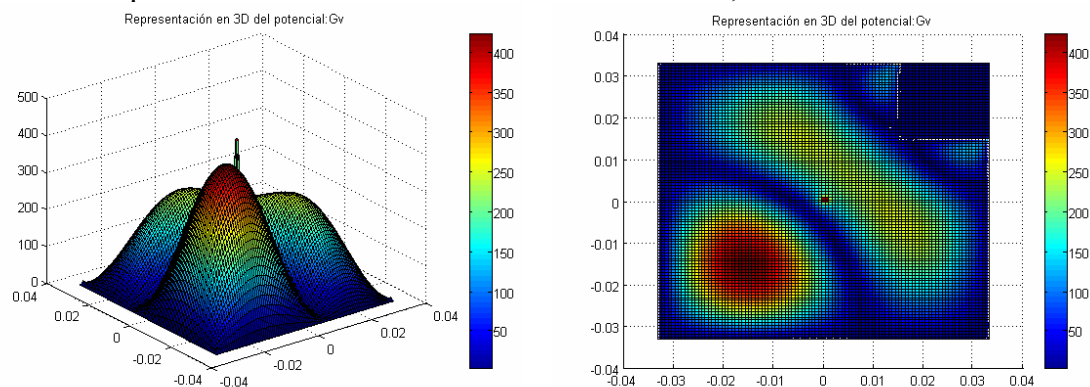


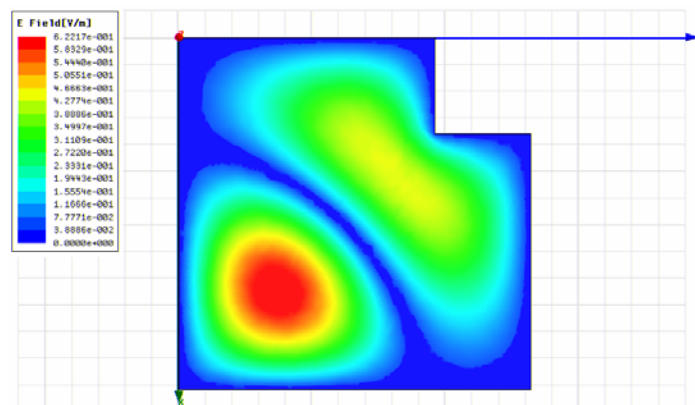
Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.26 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.125Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Comprobamos como la distribución del potencial escalar se adapta de forma adecuada al obtenida con HFSS© salvo el error que aparece en las esquinas adyacentes al entrante, que aunque se ha reducido respecto a otros casos sigue estando presente. Excepto este error que se encuentra muy localizado, la distribución del potencial en la guía es correcta.

Vamos a tratar de volver a validar los resultados, mostrando para ello la resonancia que se encuentra a una frecuencia de 7.629 Ghz, obteniendo un resultado de:



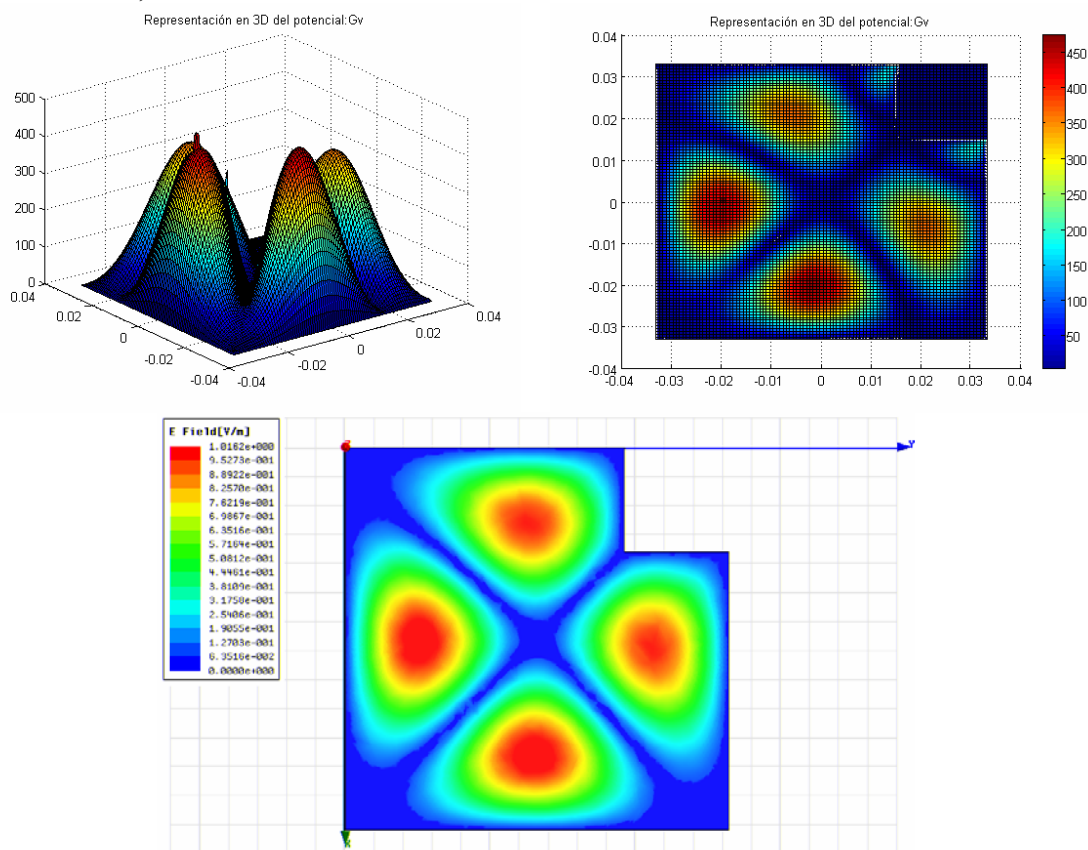


Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.27 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.629Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Comprobamos como la distribución del potencial escalar se adapta a la guía, siendo muy parecida la distribución del campo E_z proporcionado por HFSS©.

Finalmente, mostraremos una última comparativa a la frecuencia de resonancia de 8.952Ghz, obteniendo unos resultados de:



Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.28 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 8.952Ghz de una cavidad dual de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Volvemos a encontrarnos con la misma situación que en casos anteriores: el interior de la guía presenta una distribución de potenciales correctas, pero aparecen

errores numéricos en las esquinas adyacentes al error, que a pesar de encontrarse muy localizados, sí que tienen su cierta influencia en el resto de la guía.

Para concluir los resultados de esta guía, indicar en primer lugar la falta de convergencia al variar el número de imágenes y las posiciones de las mismas. Ello nos lleva a que no sepamos que situación es la más propicia para analizar la guía.

Tras múltiples pruebas, observamos como una ubicación de 90 imágenes a 5mm de la guía proporcionaba un menor error; la visualización de este error es sencilla pues se manifiesta como “picos” de potencial en las esquinas adyacentes al entrante. Con esta configuración, conseguimos obtener unas frecuencias de corte muy similares a las proporcionadas por HFSS© y una distribución de potencial que, salvo el error muy localizado en las esquinas adyacentes al entrante, se corresponde con el obtenido con HFSS©.

Indicar que puede existir otra configuración de ubicación de imágenes y número de las mismas que proporcione un error en la guía mucho menor; una posible forma de encontrar esta configuración sería mediante el concepto de “Coste” introducido en el capítulo 3, extendiendo el mismo a estructuras tridimensionales.

6.7 Guía flange

Otro ejemplo de guía de ondas cuyo análisis de potenciales puede ser importante es la denominada guía “flange”. La guía que analizaremos parte de una estructura cuadrada de dimensiones 66x66x30mm a la que se realiza un corte en diagonal en su vértice superior derecho. Realizaremos el análisis empleando un total de 50 imágenes situadas alrededor de la cavidad a una distancia de 5 mm. La situación que estamos analizando es la siguiente:

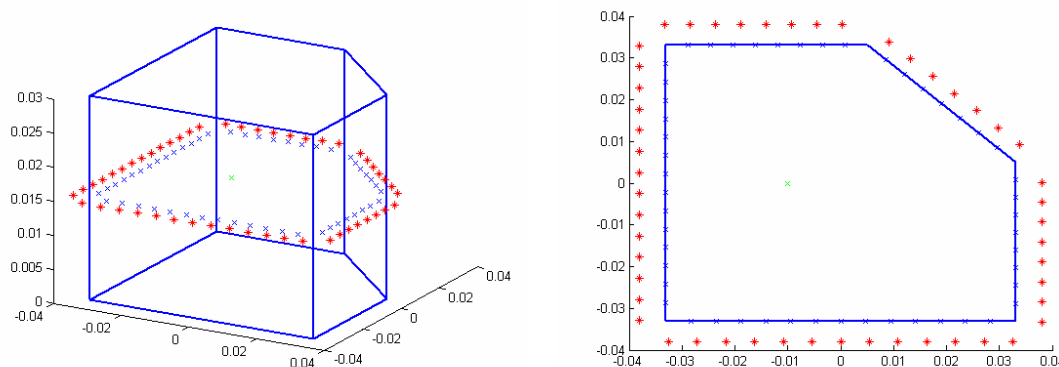


Figura 6.29 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía flange de altura 30mm.

Esta guía, al igual que ocurría con la guía dual analizada anteriormente, presenta un entrante que puede ocasionar “picos” de error, por lo que realizaremos un estudio de su convergencia en función tanto de las imágenes empleadas como de la posición de las mismas.

En primer lugar, mostraremos cortes para los potenciales en el eje ‘X’ para un total de 50 imágenes en función de la distancia de las mismas a la guía. Emplearemos para ello una frecuencia de 7Ghz. Los resultados que obtenemos son los siguientes:

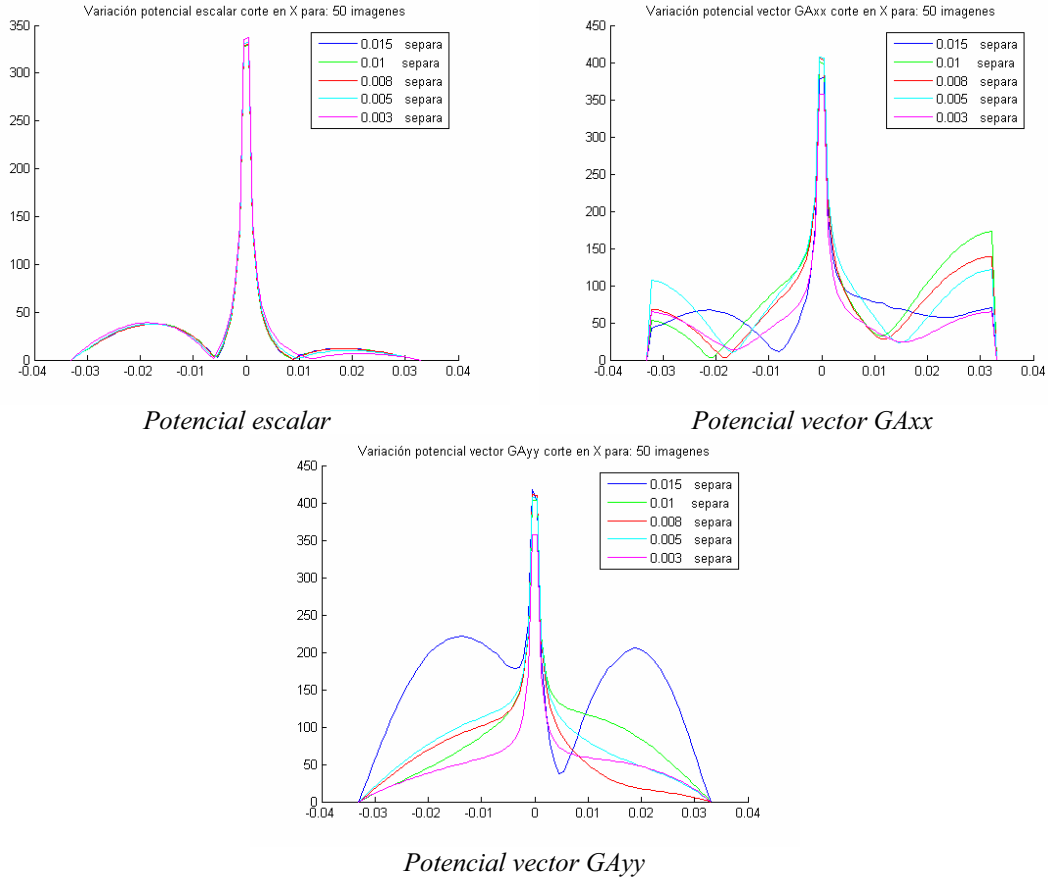
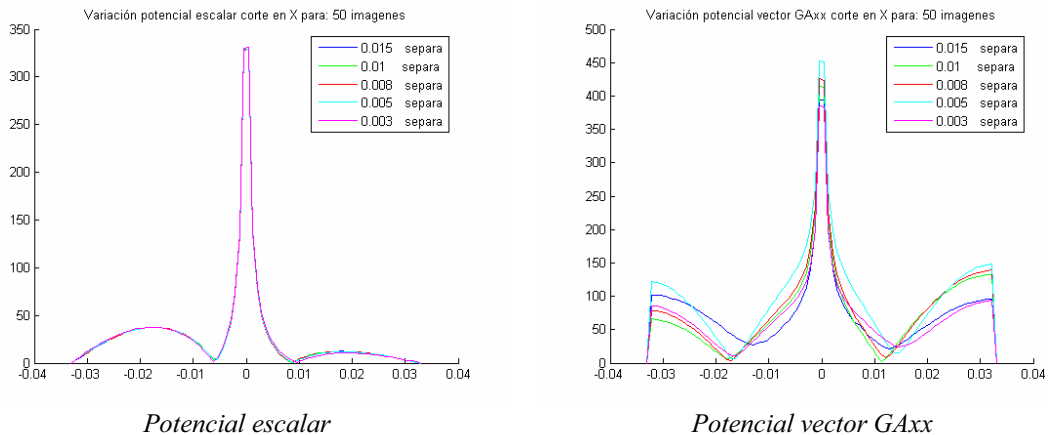


Figura 6.30 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 GHz. 1 anillo con 50 imágenes.

En la figura anterior podemos observar como se produce una convergencia bastante importante en el potencial escalar, existiendo diferencias mínimas entre las distintas ubicaciones de las imágenes. No obstante para el potencial vector si que aparecen diferencias significativas, ya que no llegan a converger las distintas ubicaciones de las imágenes.

Para continuar con el estudio en función de la ubicación de las imágenes, realizaremos los mismos cortes empleando 3 y 5 anillos con el fin de que afecte menos la altura eléctrica de la cavidad y que los resultados sean más convergentes.

Para el caso de 3 anillos, tenemos:



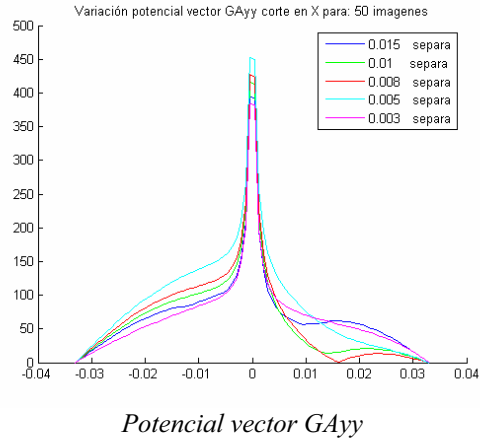


Figura 6.31 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 3 anillos con 50 imágenes cada uno.

Podemos observar como al aumentar el número de anillos los resultados son más convergentes: en el potencial escalar las diferencias son inexistentes y en el potencial vector, aunque todavía existen, se han reducido de manera considerable.

Mostraremos finalmente los resultados de convergencia al emplear 5 anillos alrededor de la cavidad, comprobando como cada vez los resultados son más convergentes e independientes de la distancia de las imágenes a la guía:

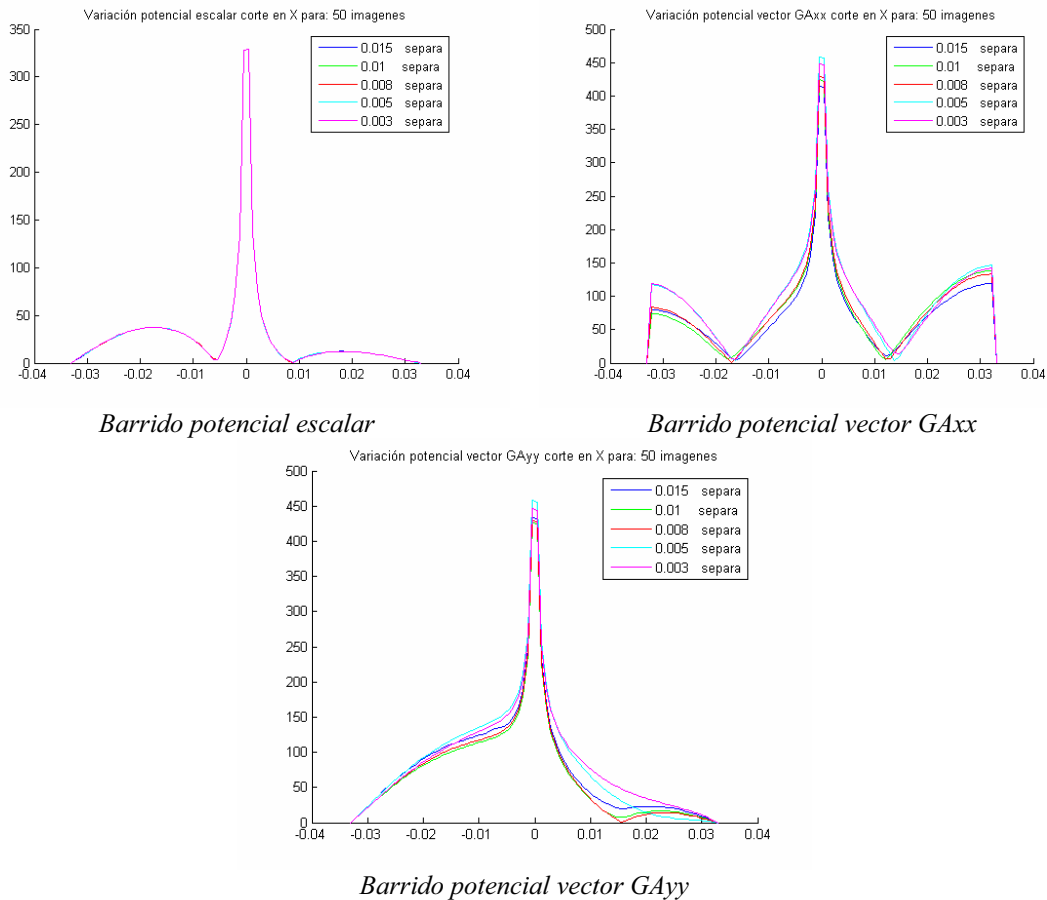


Figura 6.32 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 5 anillos con 50 imágenes cada uno.

Observamos como obtenemos unos resultados más adecuados al haber empleado 5 anillos, pues las variaciones en función de la posición son más pequeñas.

De esta forma, vamos a situar las imágenes a 5mm de la cavidad. Sobre esta distancia, vamos a variar el número de imágenes empleadas, con el fin de estudiar su convergencia y encontrar un número mínimo de las mismas que nos proporcione un resultado válido. Emplearemos un total de 5 anillos para esta última comparación, pues era en la situación en la que la convergencia era máxima. Así, obtenemos unos resultados de:

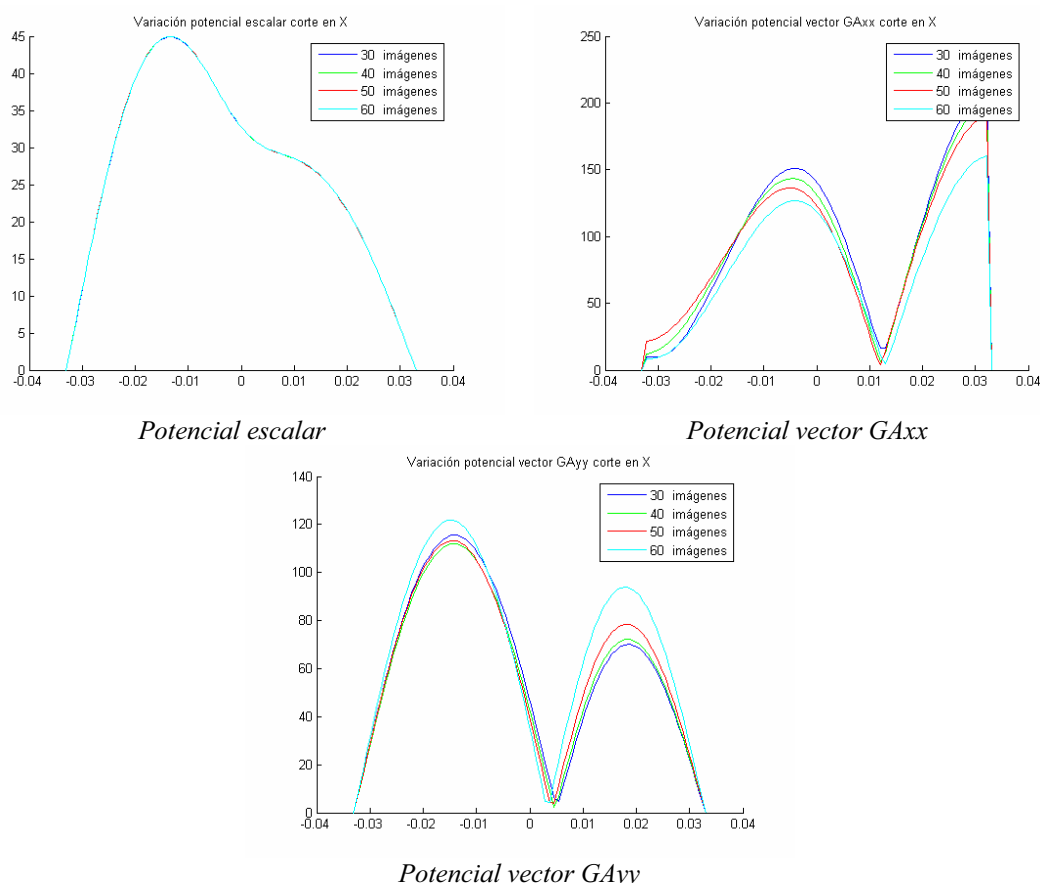


Figura 6.33 Representación de los potenciales en un corte del eje X en una guía flange a 7 Ghz. 5 anillos, variación del número de imágenes por anillo.

Comprobamos como para el potencial escalar las distintas situaciones coinciden de forma precisa; no obstante si que aparecen pequeñas variaciones en el potencial vector, siendo estas casi despreciables. Señalar que este mismo tipo de simulaciones empleando una distancia más alejada de la guía habría provocado la falta total de convergencia entre los distintos casos.

Tras el pequeño estudio de convergencia, escogeremos un total de 50 imágenes situadas a 5mm de la guía con el fin de analizar la misma. En primer lugar, realizaremos un barrido frecuencial para encontrar las frecuencias de resonancia; para ello ubicaremos la fuente en la posición (-15, 0, 15)mm y un punto de observación fijo en (15,0,15)mm. En esta situación, se realiza el barrido frecuencial:

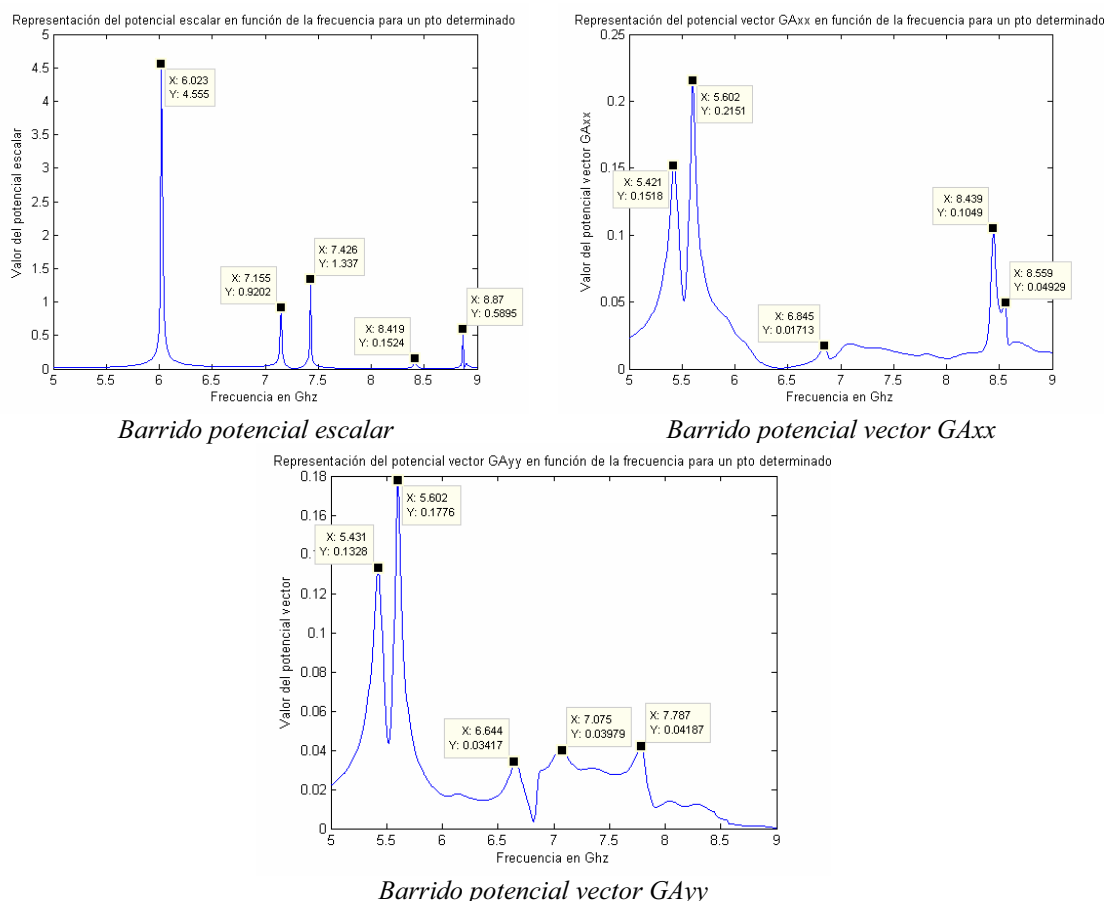


Figura 6.34 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía flange de altura 30mm al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.

Tras obtener las resonancia, vamos a realizar una pequeña comparación entre algunas de las frecuencias obtenidas y las proporcionadas por HFSS© con el fin de ver la precisión que conseguimos con el método de las imágenes espaciales.

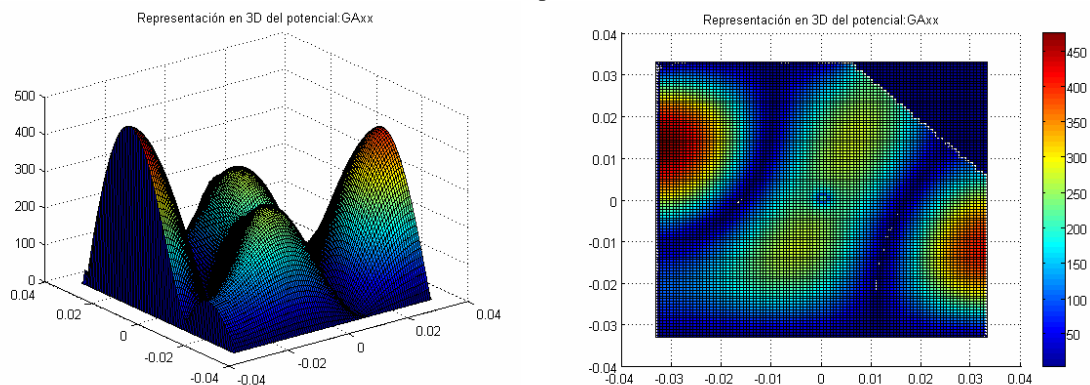
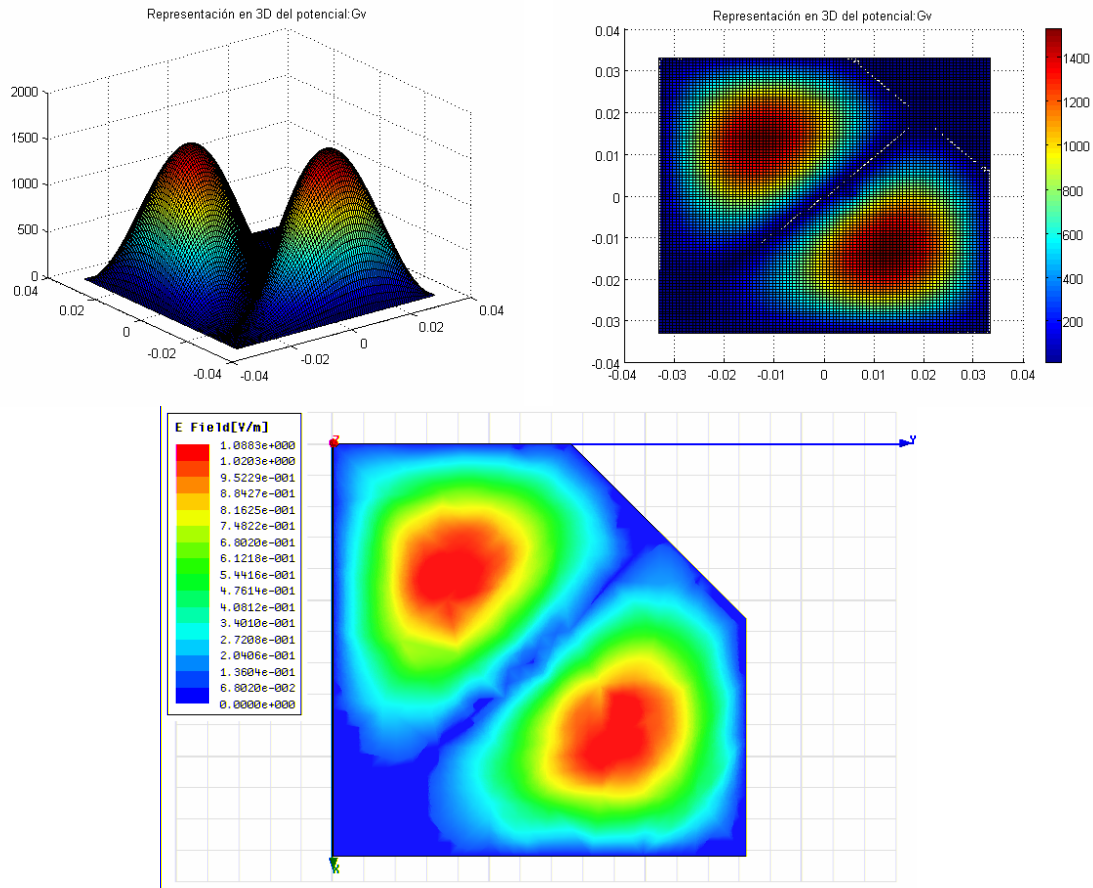
Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)	Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)	Error absoluto(Ghz)	Error relativo (%)
5.4633	5.431	0.0323	0.5912
5.6030	5.602	0.0010	0.0178
6.0228	6.023	0.0008	0.0129
6.6988	6.644	0.0548	0.8180
6.8895	6.845	0.0445	0.6459
7.1075	7.075	0.0325	0.4572
7.1428	7.155	0.0122	0.0170
7.4159	7.426	0.0101	0.1361

Tabla 6.8 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura

De la tabla anterior podemos destacar como las dos frecuencias introducidas por el potencial escalar (6.023 y 7.155) obtiene un error mucho más reducido que el resto. Ello es debido a que en el barrido frecuencia se ha empleado un único anillo, debido al gran coste computacional que requiere emplear un sistema formado por 3 ó 5 anillos. No obstante, los resultados siguen siendo bastante satisfactorios, con un error relativo inferior al 0.82% en todos los casos.

Mostraremos los potenciales en el interior de la guía flange empleando un total de 5 anillos situados en su alrededor, verificando la distribución de los potenciales con el campo eléctrico E_z obtenido con HFSS©.

Omitimos la representación de la primera resonancia, ya que es un único pico de potencial distribuido en el interior de la guía. No obstante sus resultados también se han validado. Mostraremos por tanto la segunda resonancia, situada a la frecuencia 7.155Ghz:



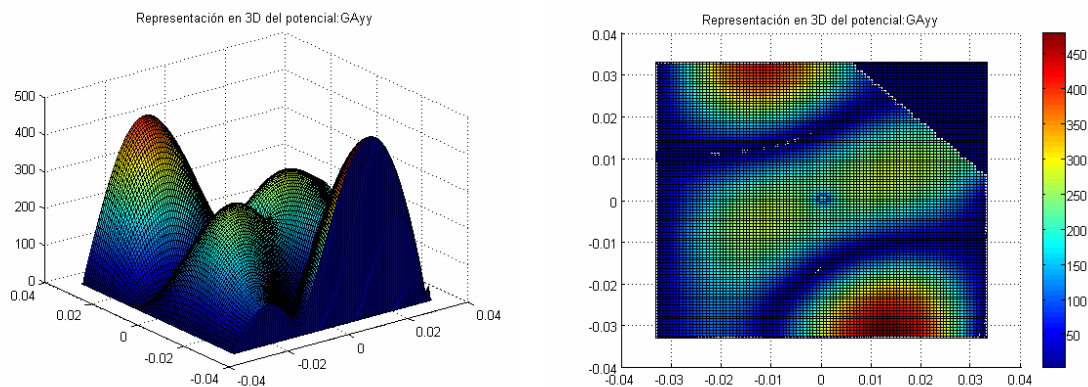
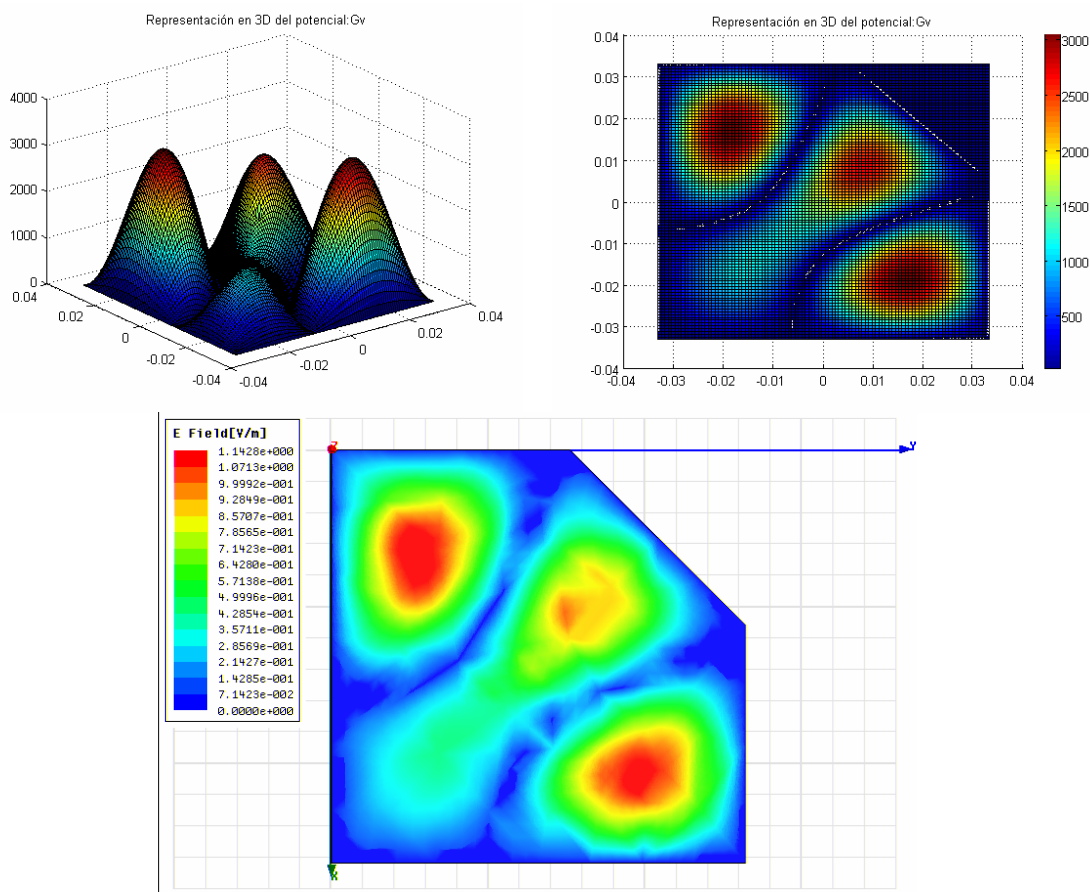


Figura 6.35 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 7.155Ghz de una cavidad flange de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Observamos como los resultados son totalmente coherentes, adaptándose la distribución del potencial escalar a la forma del campo E_z proporcionada por HFSS©.

Otra resonancia de un mayor orden es la que se produce a la frecuencia de 8.419, siendo el potencial en el interior de la guía en este caso de:



Resultado del campo E con HFSS©

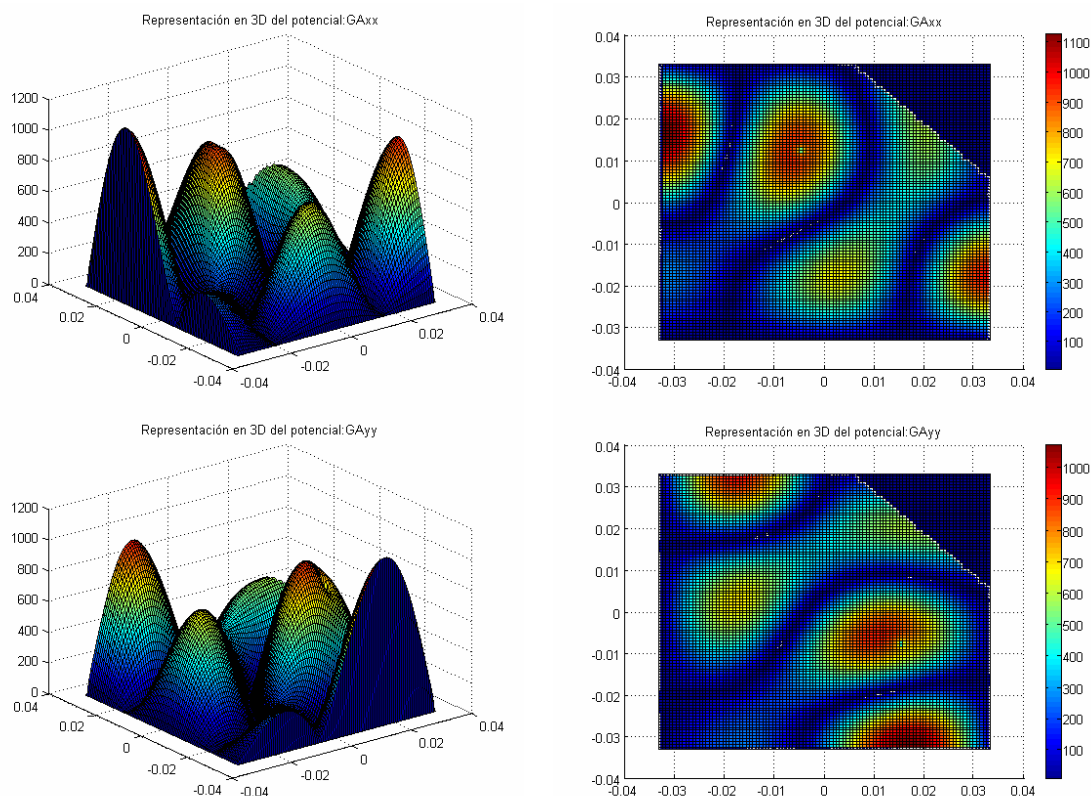


Figura 6.36 Potenciales a la frecuencia de resonancia de 8.419Ghz de una cavidad flange de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Como viene sucediendo hasta ahora, conseguimos una validación de la distribución del potencial escalar mediante el campo eléctrico dado por HFSS©.

Esta guía, debido al entrante en su parte superior derecha, ha provocado múltiples problemas a la hora de su análisis, debido a que no se encontraba una convergencia con la posición de las imágenes y con el número de las mismas. No obstante, tras encontrar una configuración válida, se han validado las frecuencias de corte obtenidas (con una buena precisión) así como la distribución del potencial escalar en las distintas resonancias.

6.8 Limitaciones del método: Guía estrella y ridge

Hasta este punto hemos obtenido unos resultados válidos en todas las guías que hemos analizado, a pesar de tener más o menos problemas para encontrar una ubicación y número de imágenes capaces de analizar las estructuras propuestas.

El método de las imágenes espaciales ha presentado problemas cuando se trataban de analizar guías con entrantes, como pueden ser la guía dual ó la guía flange estudiadas en apartados anteriores. En estos casos, a pesar de la falta inicial de convergencia en los resultados, conseguíamos hallar situaciones válidas para el análisis. Si seguimos introduciendo más entrantes en la guía, el análisis mediante imágenes espaciales se vuelve más inestable, apareciendo un mayor número de picos de “error” en las esquinas adyacentes a los entrantes.

En este punto presentaremos el análisis de dos guías, como son la estrella y la dual que no han podido ser analizadas satisfactoriamente de forma general, aunque si se consiguen resultados parciales válidos lo que indica que una mejora del método puede conducir al solventar el problema de los entrantes.

6.8.1 Guía estrella

En este punto vamos a analizar una guía “estrella”, que parte de una guía cuadrada de $132 \times 132 \times 30 \text{ mm}$, sobre la que se han realizado cuatro cortes cuadrados en las esquinas, siendo cada corte de una dimensiones de $44 \times 44 \text{ mm}$.

Observamos como las dimensiones de la guía propuesta en este caso son diferentes a las analizadas hasta ahora (casi el doble de longitud), es por ello que el número de imágenes que tenemos que emplear para su análisis también debe de aumentar. En primer lugar, vamos a mostrar la guía a analizar empleando para ello un total de 150 imágenes, situadas a una distancia de 10mm de la guía:

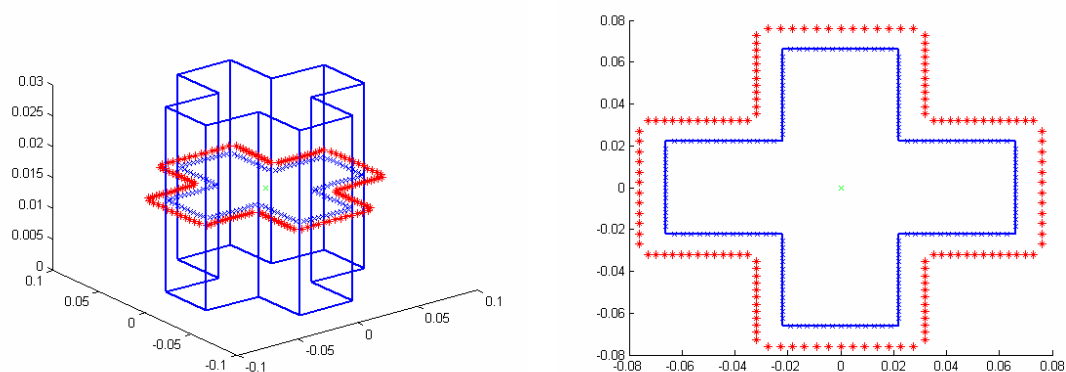


Figura 6.37 Situación de 1 anillo con 150 imágenes situados sobre una guía estrella de altura 30mm.

Al realizar un primer cálculo de los potenciales en el interior de la guía, con un número de imágenes reducido (70 por ejemplo), se aprecia como aparecen “picos” de error en las esquinas adyacentes a los 4 entrantes. Esto se puede apreciar claramente calculando el potencial escalar en el interior de la estructura, a 5.5Ghz por ejemplo:

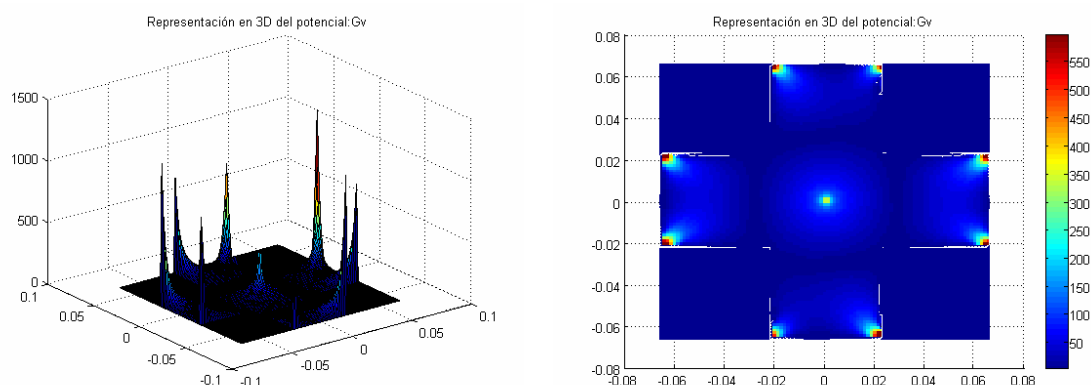


Figura 6.38 “Picos” de error en los vértices de una guía estrella al ser analizada con 70 imágenes

Vemos como aparece el mismo efecto que en el caso de la guía dual, debido a la presencia de no 1 sino 4 entrantes. Esto hace que el análisis de esta guía sea muy complejo mediante la técnica de las imágenes espaciales.

No obstante vamos a tratar de conseguir resultados válidos, realizando un análisis de convergencia del método en función de la ubicación de las imágenes, el número de las mismas y el empleo de diversos anillos que rodeen completamente la cavidad.

En primer lugar, se han realizado varios barridos en función del número de imágenes para distintas posiciones de las mismas. En todos ellos aparece una falta total de convergencia entre las distintas imágenes, especialmente cuanto más alejadas estén las mismas de la estructura. Posteriormente se realizó un barrido en función del número de imágenes, siendo necesario el empleo de una gran cantidad de las mismas (250) para obtener resultados razonables.

Así, tras ubicar las imágenes a 5mm de la cavidad (pues más cerca los resultados se distorsionan) conseguimos llegar a una situación en la que se obtenía unos potenciales relativamente convergentes con el número de imágenes, tal y como se muestra a continuación:

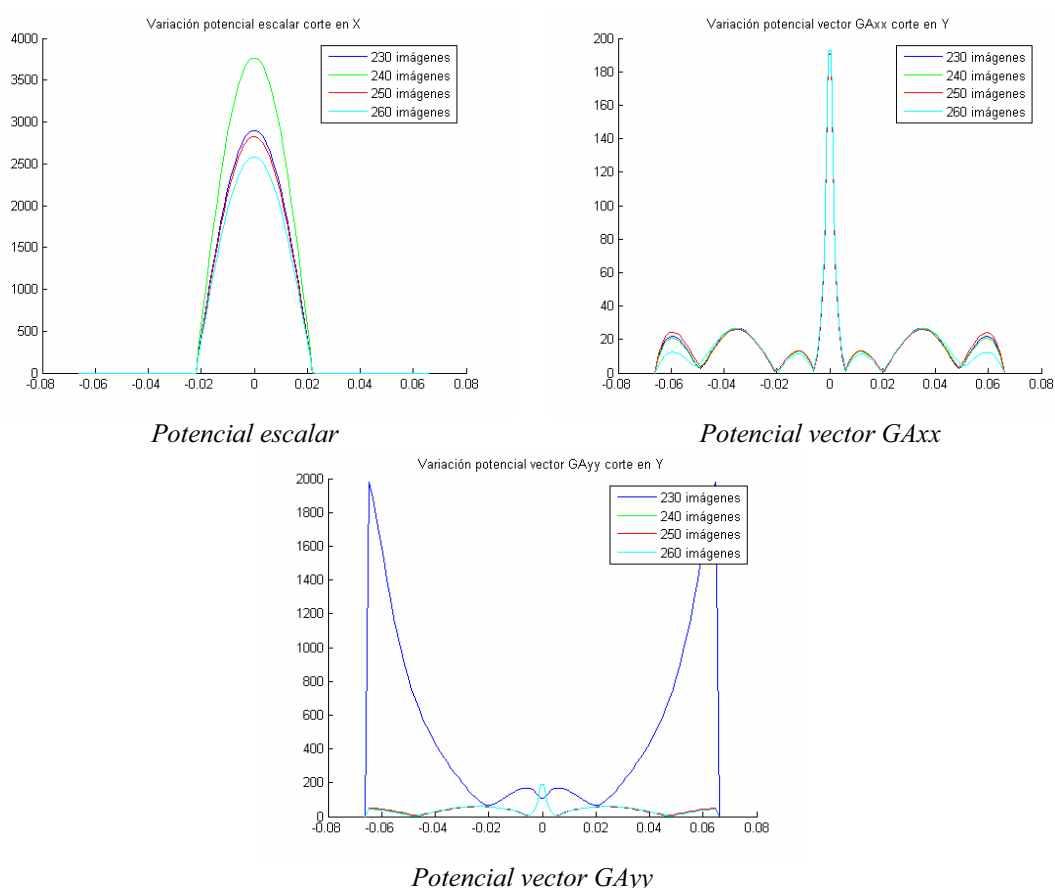


Figura 6.39 Potenciales en ejes 'x' e 'y' al variar el número de imágenes en el análisis de una guía estrella.

Se observa como 230 imágenes no proporciona un resultado convergente en el potencial vector GA_{yy} . El resto de valores, aun con pequeñas diferencias, muestran los mejores resultados obtenidos en los distintos análisis.

De esta forma, se ha elegido una configuración de 250 imágenes en un único anillo (pues el empleo de varios anillos no ha mejorado los resultados anteriores) ubicando el mismo a una distancia de 5mm de la cavidad. En estas condiciones, se ha realizado el barrido frecuencial sobre un punto fijo ubicado en (10,0,15)mm encontrándose la fuente en la situación (-10,0,15)mm. Se han obtenido las siguientes resonancias:

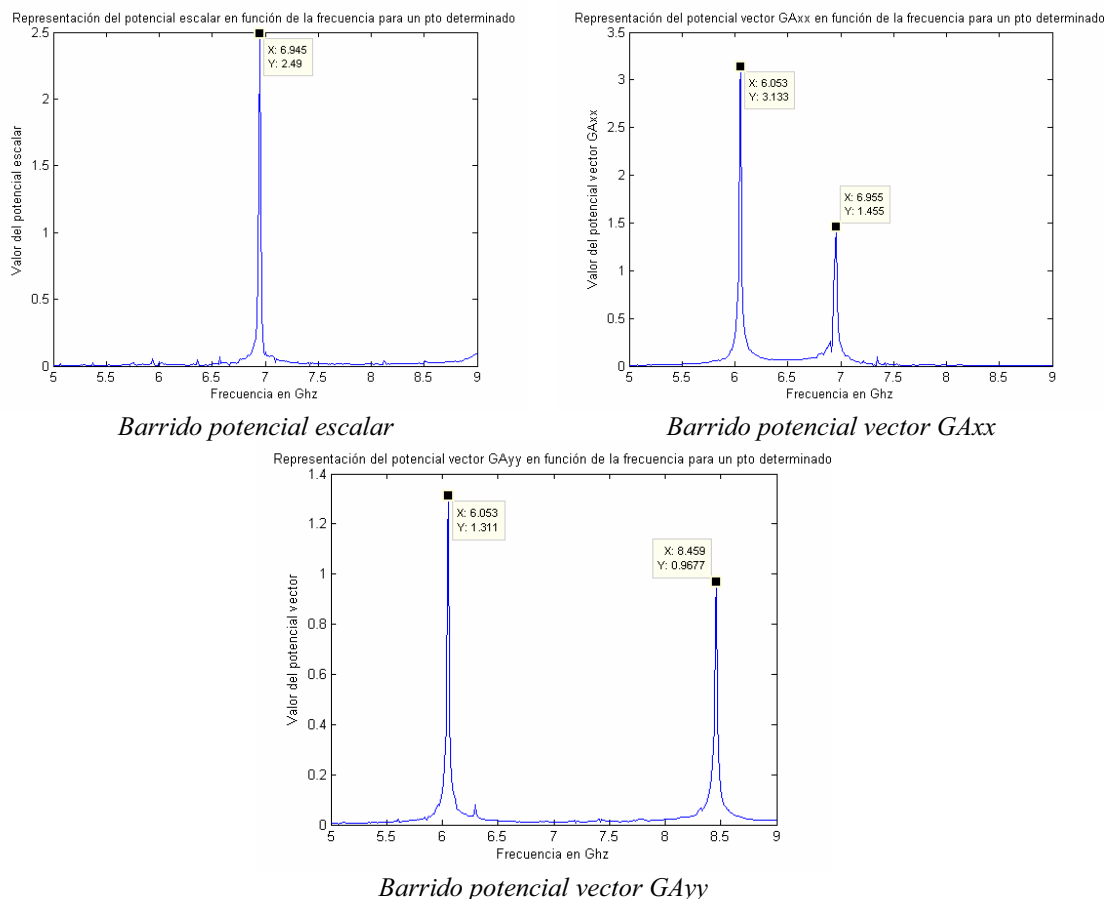


Figura 6.40 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía estrella de altura 30mm al variar la frecuencia de 5 a 9.0 Ghz.

En primer lugar, destacamos la presencia de muy pocas resonancias, circunstancia que no se había producido hasta ahora. Realizaremos una comparación de las frecuencias obtenidas con las calculadas mediante HFSS© para evaluar su precisión:

Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)	Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)	Error absoluto(Ghz)	Error relativo (%)
6.0457	6.053	0.0073	0.1207
6.9371	6.945	0.0079	0.1138
8.4368	8.459	0.0222	0.2631

Tabla 6.9 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura

En la tabla anterior observamos que hemos logrado una precisión aceptable, no obstante el cálculo no ha sido correcto pues faltan muchas frecuencias de resonancia que no han sido obtenidas con el método de las imágenes espaciales.

Así por ejemplo, el primer modo se propaga a la frecuencia de 5.7234 Ghz sin que ésta frecuencia sea detectada. Ello podría ser debido en una primera instancia a un

problema del método que calcula las frecuencias de resonancia, sin embargo, tras realizar múltiples simulaciones no se pudo encontrar una ubicación de imágenes que proporcione la distribución adecuada del potencial escalar para este modo. Podemos observar en la figura 6.41 como con HFSS© aparece esta primera resonancia de forma clara, mientras que con el método de las imágenes no.

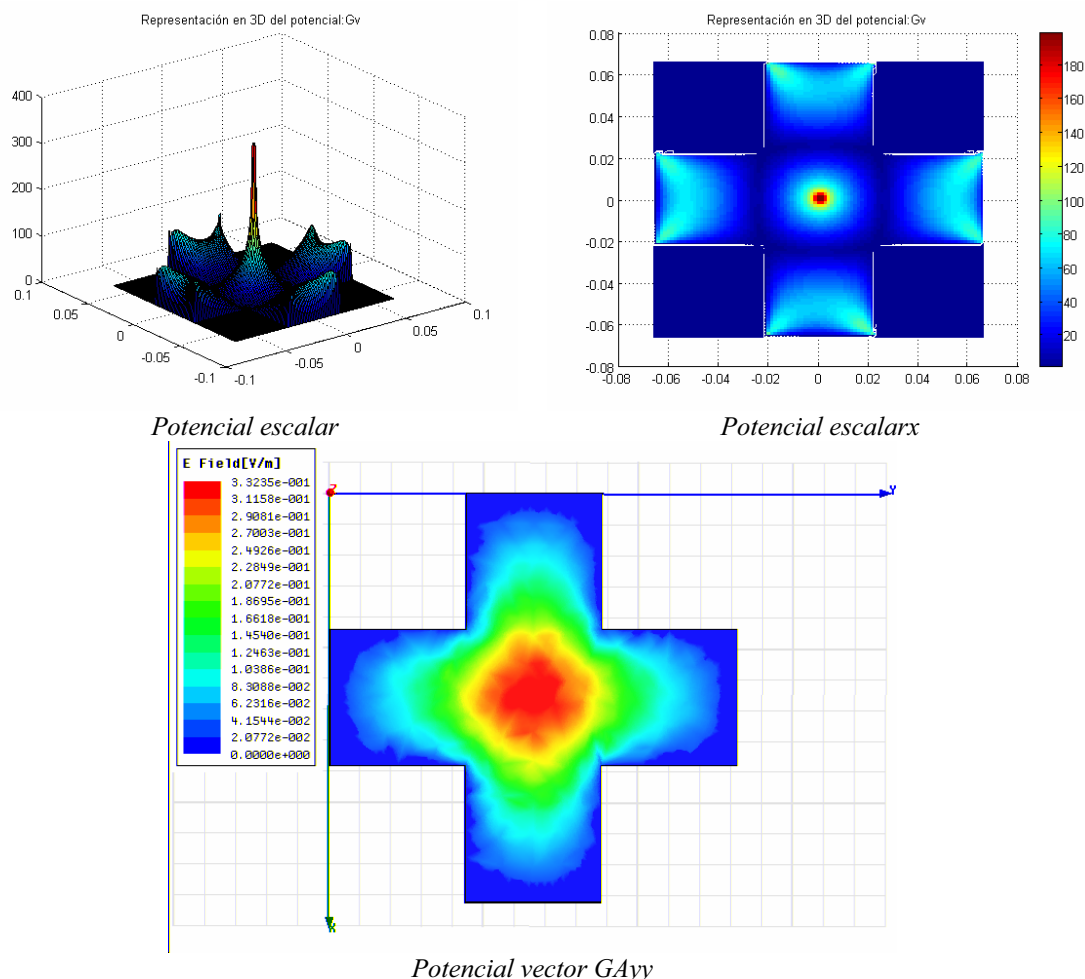
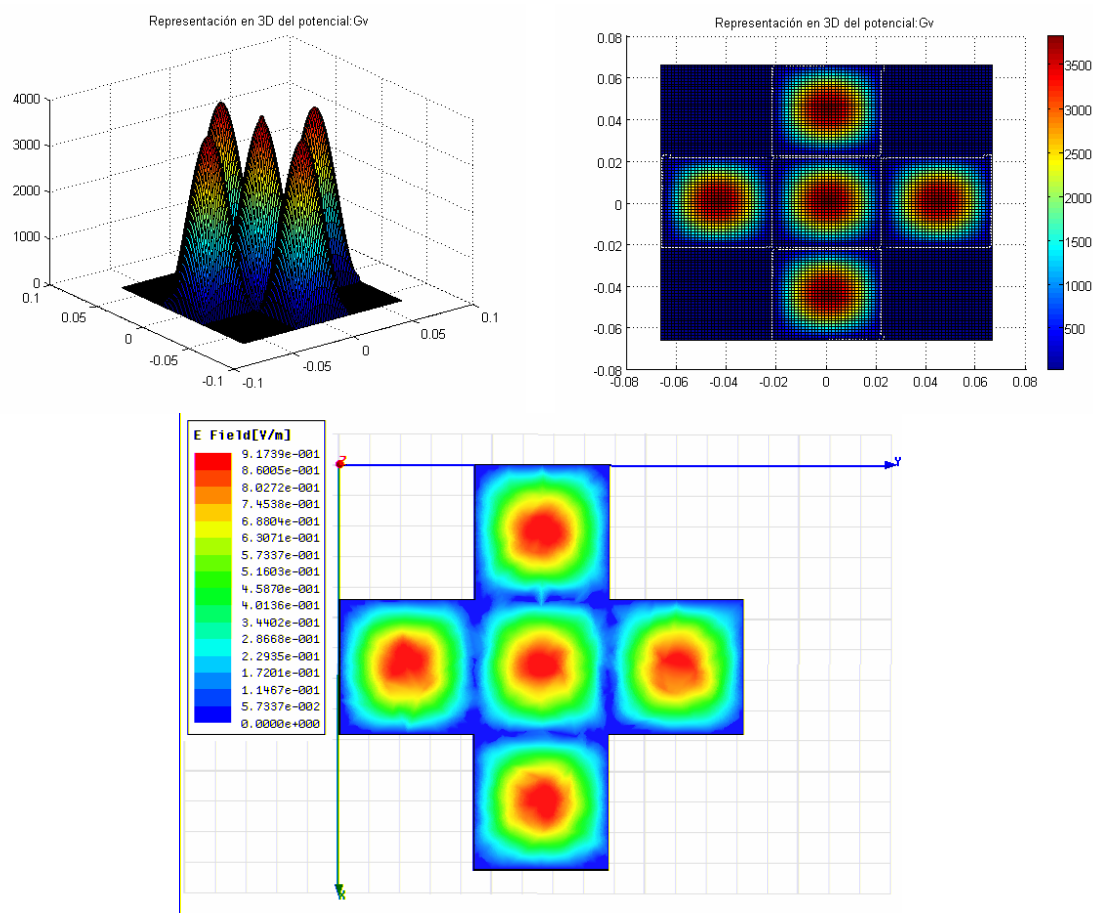


Figura 6.41 Primer modo de resonancia en una guía estrella de altura 30mm. Frecuencia 5.723 Ghz

Al igual que ocurre con la primera resonancia, el resto tampoco ha sido detectado ni se ha conseguido su distribución de potencial.

En la frecuencia 6.0533 tampoco se ha conseguido una distribución adecuada del potencial.

Hasta este punto todos los resultados son incoherentes, sin embargo aparecen muestra de un aparente buen comportamiento del método a otra frecuencia, como es la 6.9358, donde se consigue una distribución adecuada de los potenciales:



Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.42 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 6.9358Ghz de una cavidad tipo estrella de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Tras estos resultados podemos concluir que el método a pesar de no funcionar correctamente para esta guía, si que proporciona unos resultados puntuales adecuados. Ello abre una nueva línea de investigación que trate de modificar el método propuesto para conseguir obtener resultados convergentes en este tipo de guías.

6.8.2 Guía ridge

Para terminar este apartado, vamos a realizar un análisis de la guía ridge. La guía esta basada en una cuadrada de dimensiones $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$ sobre la que se realizan dos cortes cuadrados de dimensiones $22 \times 22 \text{ mm}$ en los lados superior e inferior.

Para el análisis de esta estructura emplearemos en primer lugar 90 imágenes distribuidas alrededor de la misma a una distancia de 5mm como se muestra en la figura 6.43. Destacar que si aumentamos mucho esta distancia de separación se puede producir el “solape” entre las imágenes situadas en los entrantes, provocándose una indeterminación matemática a la hora de resolver los valores de las imágenes.

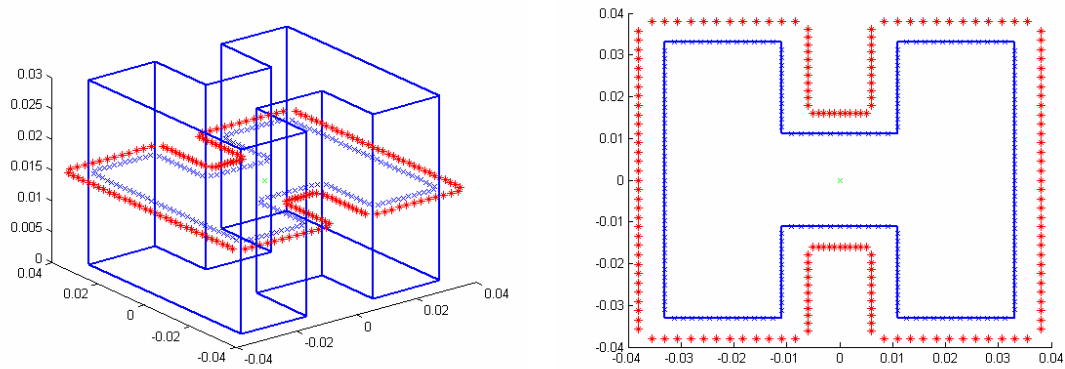


Figura 6.43 Situación de 1 anillo con 90 imágenes situados sobre una guía ridge de altura 30mm.

Debido a los dos entrantes que posee esta guía, nos encontramos ante los mismos problemas que en la guía estrella: una falta de convergencia entre las distintas ubicaciones de las imágenes y también en cuanto a su número. Ello nos impide a primera instancia el cálculo adecuado de los potenciales en el interior de la estructura, ya que aparecen “picos” de error en las esquinas adyacentes de los entrantes, invalidando las posibles convergencias de resultados.

Un ejemplo claro lo podemos visualizar en la siguiente figura, donde se realiza un análisis del potencial escalar a la frecuencia de 9.0 Ghz situando las imágenes a 10mm de la guía:

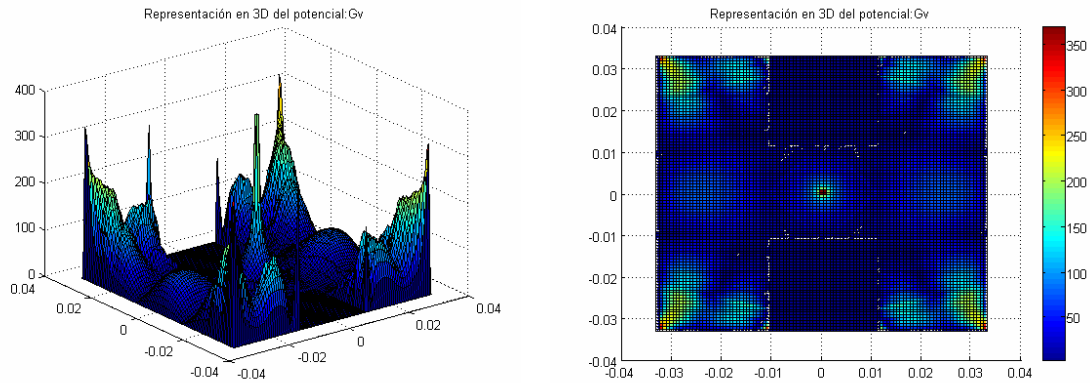


Figura 6.44 “Picos” de error en los vértices de una guía ridge al ser analizada con 70 imágenes

Comprobamos como aparecen los “picos” de error en las esquinas, invalidando el resultado. De esta forma es muy complejo el análisis de esta guía mediante las imágenes espaciales, pues los distintos análisis no son convergentes y no se puede saber que ubicación y cuantas imágenes emplear.

En primer lugar, vamos a ubicar las imágenes a 5mm de la cavidad (pues parece que es una distancia óptima para que las imágenes no se solapen dentro de los entrantes) y variaremos el número de imágenes empleadas, con el fin de estudiar la convergencia. Así, a 6Ghz de frecuencia, obtenemos los siguientes cortes de potenciales:

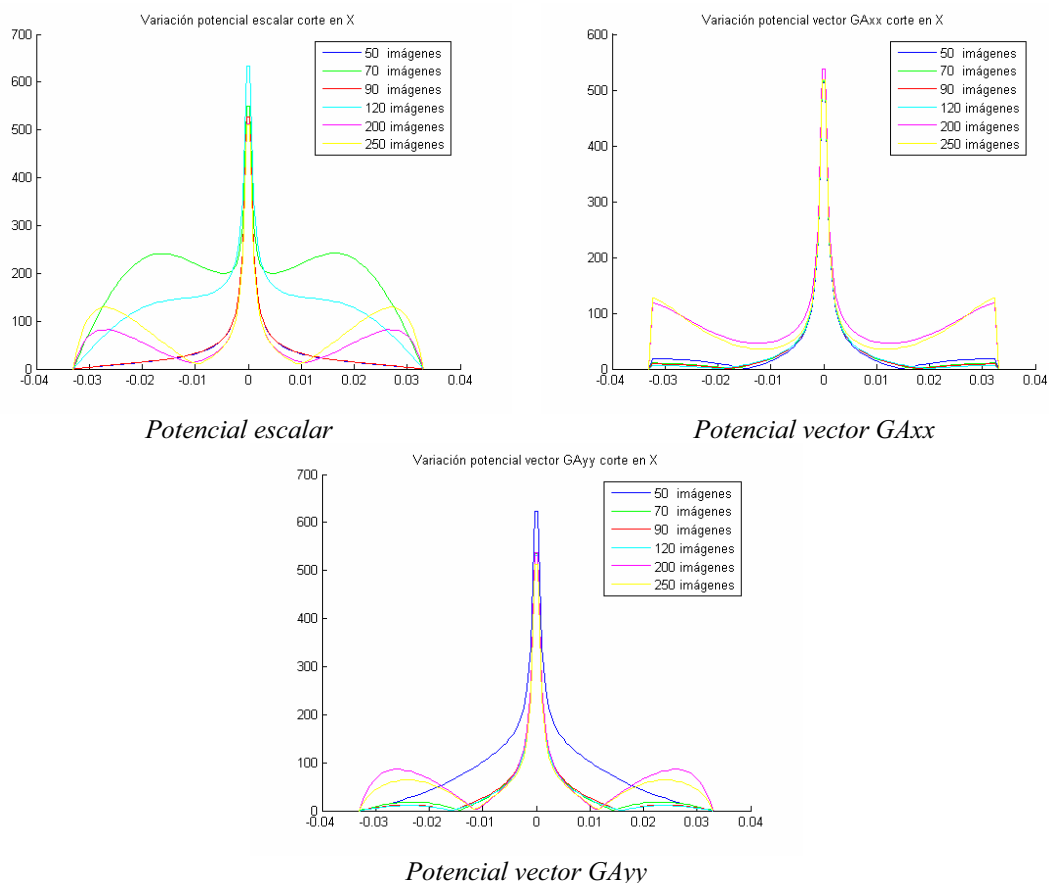
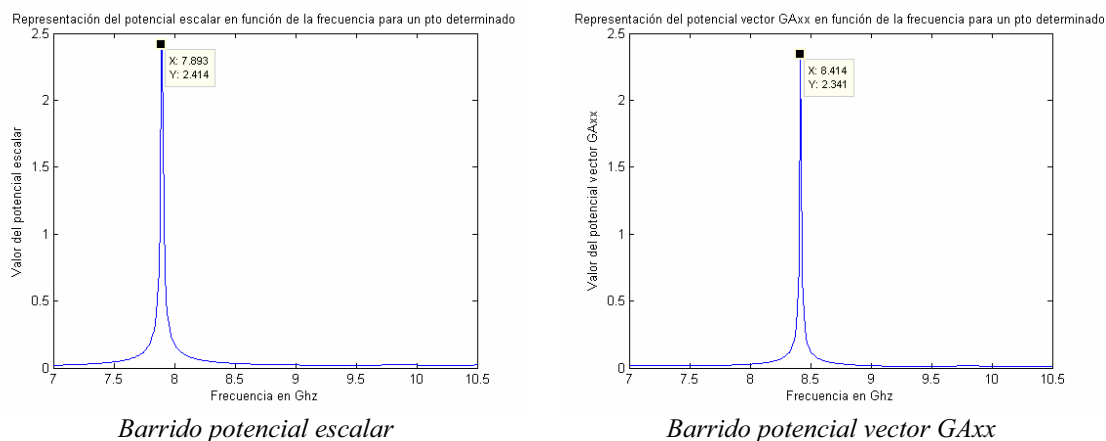
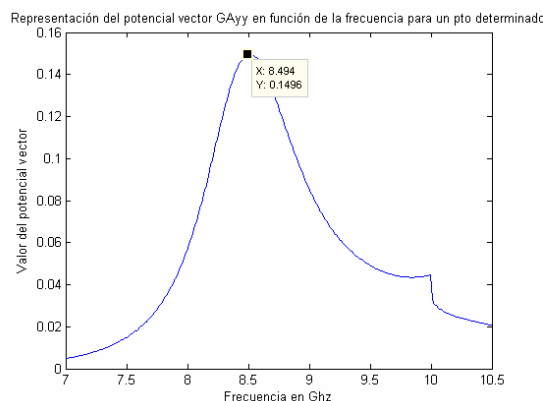


Figura 6.45 Potenciales en el eje 'x' al variar el número de imágenes en el análisis de una guía ridge.

Se puede observar que no los resultados no son convergentes, principalmente en el potencial escalar. Un barrido en función de la distancia de las imágenes proporciona la misma conclusión.

No obstante, trataremos de realizar el análisis: para ello emplearemos 90 imágenes y una ubicación a 5mm de la guía. Sobre esta situación, realizaremos un barrido en frecuencia, situando la fuente en el origen (0,0,15)mm y el punto fijo de observación en (15,0,15). Así obtenemos:





Barrido potencial vector GA_{yy}

Figura 6.46 Evaluación de los potenciales en un punto fijo en el interior de una guía ridge de altura 30mm al variar la frecuencia de 7 a 10.5 Ghz.

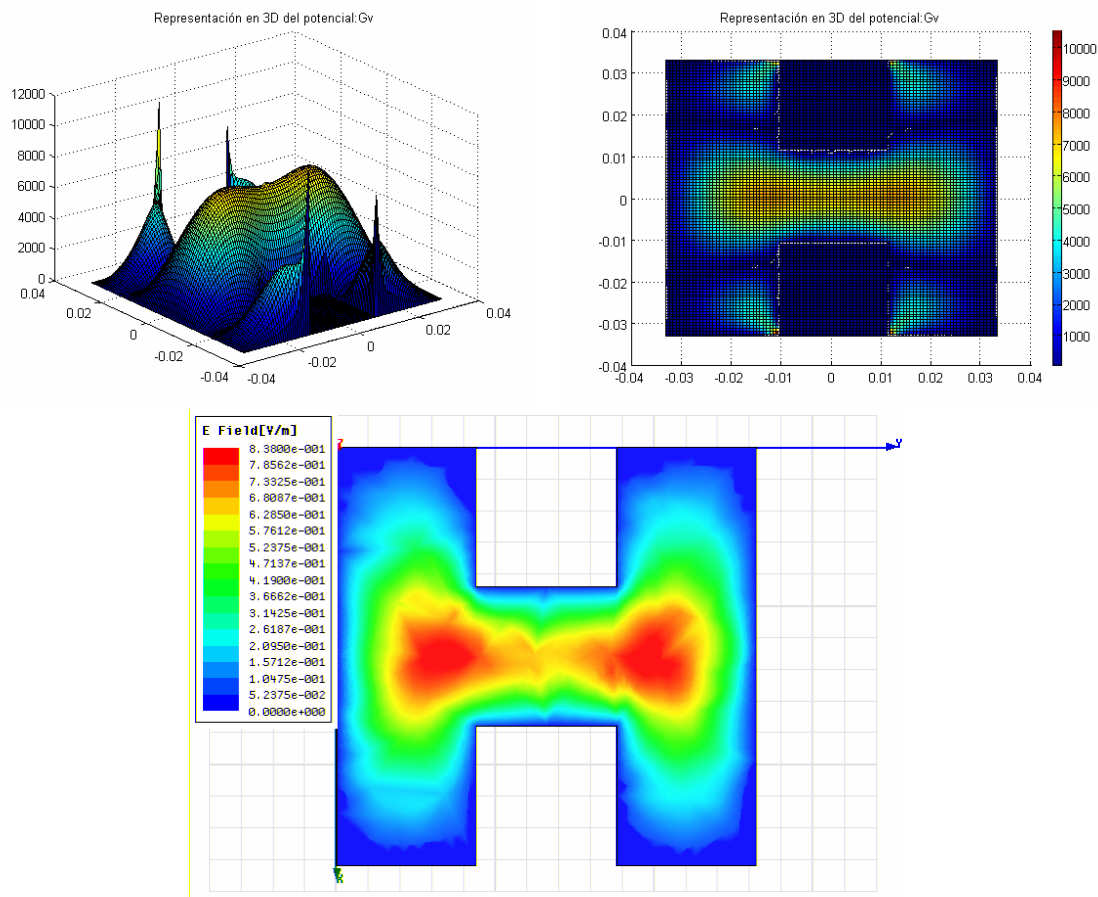
Al igual que ocurría con la guía estrella aparecen muy pocas resonancias; eso es debido a que la fuente es incapaz de excitar al modo en estas geometrías complejas. Compararemos los resultados con los obtenidos con HFSS para evaluar su precisión:

<i>Frecuencia de corte HFSS© (Ghz)</i>	<i>Frecuencia de corte método imágenes(Ghz)</i>	<i>Error absoluto(Ghz)</i>	<i>Error relativo (%)</i>
7.8387	7.893	0.0543	0.6927
8.3970	8.414	0.0170	0.2024

Tabla 6.10 Precisión al obtener las frecuencias de corte de una guía flange de 30mm de altura

Las frecuencias se han calculado con una precisión bastante pobre, pero lo más importante es que faltan muchas resonancias por obtener pues los modos no han sido excitados. A pesar de que puede ocurrir que se sitúe la fuente en un nulo particular de un modo, no es lógico que únicamente un modo en un barrido tan amplio. No obstante, también puede ser debido a que la fuente ha sido incapaz de excitar al resto de modos; por ello se ha realizado el análisis con distintas posiciones de la fuente, obteniendo siempre el mismo resultado.

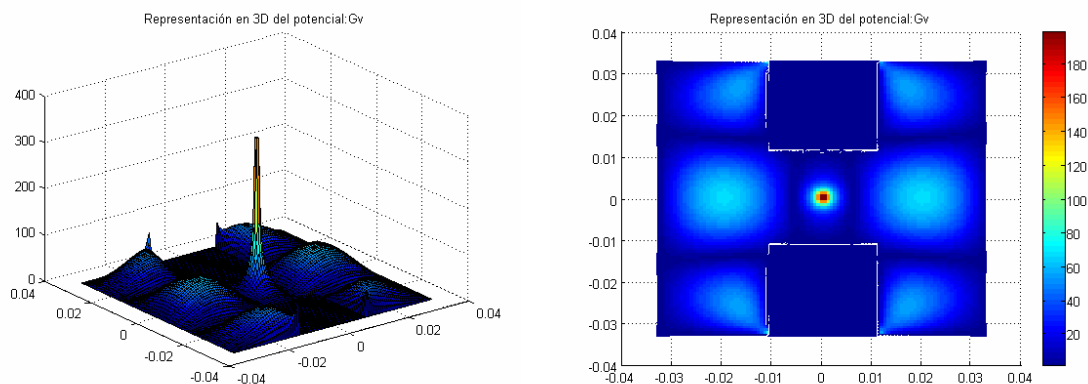
Finalmente, se confirma la incapacidad del método para calcular de forma correcta los potenciales al comparar los mismos con los obtenidos mediante HFSS©. No obstante, el modo detectado (a una frecuencia de 7.893Ghz) si que es obtenido con una precisión adecuada, como comprobamos en la figura 6.47. Destacamos en esa figura la presencia de unos “picos” de error muy importantes en las esquinas adyacentes a los entrantes, adquiriendo un valor superior al de la resonancia. Este es el error que nos invalida en el método para este tipo de guías.

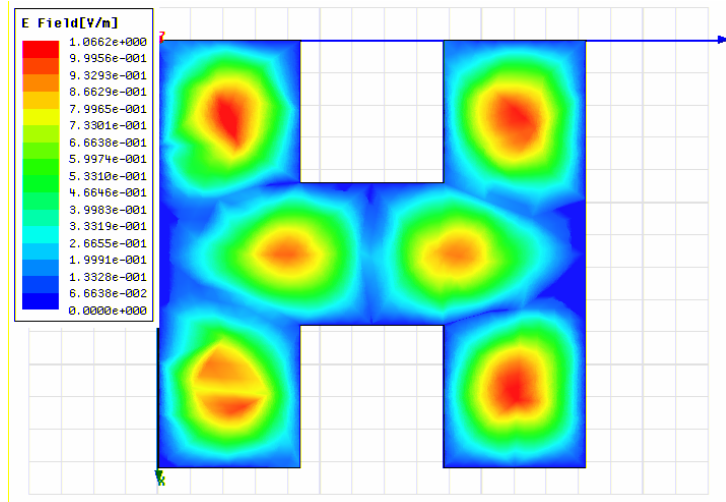


Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.47 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 7.893Ghz de una cavidad tipo ridge de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

A otras frecuencias, el método se muestra incapaz de detectar las resonancias, a pesar de cambiar la ubicación de la fuente puntual en los centros de las mismas. Por ejemplo vemos como en la frecuencia 9.1127Ghz, no aparecen las resonancias buscadas, aunque los “picos” de error en este caso son muy reducidos. Parece que el modo no logra excitarse.





Resultado del campo E con HFSS©

Figura 6.48 Potencial escalar a la frecuencia de resonancia de 9.1127Ghz de una cavidad tipo ridge de altura 30mm. Comparación con el campo eléctrico proporcionado por HFSS©.

Tras estos resultados podemos concluir que el método no funciona del todo bien para esta guía, ya que propicia unos “picos” de error en las esquinas adyacentes a los entrantes que invalidan el resto de resultados. A pesar de ello, se siguen consiguiendo ciertos resultados puntuales válidos. Los potenciales calculados serán totalmente válidos cuando se consigan eliminar estos errores, existiendo entonces total convergencia entre las distintas representaciones.

6.9 Análisis multicapa: Guía cuadrada con dos dieléctricos

Hasta ahora, todos los análisis de guías han sido realizados con aire ($\epsilon_r = 1$) en su interior. No obstante, la teoría de las imágenes espaciales puede aplicarse de forma directa a medios multicapa gracias a la versatilidad de la transformada de Sommerfeld [9]. Sin más que definir las características de cada capa (como permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, tal y como se expuso en el capítulo anterior), podremos realizar el cálculo de los potenciales en el interior de guías estratificadas. Ello proporciona una herramienta muy poderosa de análisis para estructuras reales mediante la ecuación integral.

Para verificar su funcionamiento, vamos a realizar un pequeño estudio sobre una guía cuadrada de dos capas, una el aire ($\epsilon_r = 1$) y otra con una permitividad eléctrica de valor 2. De la misma forma que se realiza sobre la guía cuadrada, el análisis de estructuras multicapa puede ser realizado en cualquiera de las guías expuestas a lo largo de este capítulo, sin más que definir sus capas de manera adecuada.

La guía a analizar tendrá unas dimensiones de $66 \times 66 \times 30 \text{ mm}$, teniendo la primera capa una altura de 15mm y $\epsilon_r = 1$, mientras que la segunda capa tendrá una altura de 15mm y $\epsilon_r = 2$. Emplearemos para el análisis un total de 50 imágenes situadas a 15mm de la guía. La situación presentada es la siguiente:

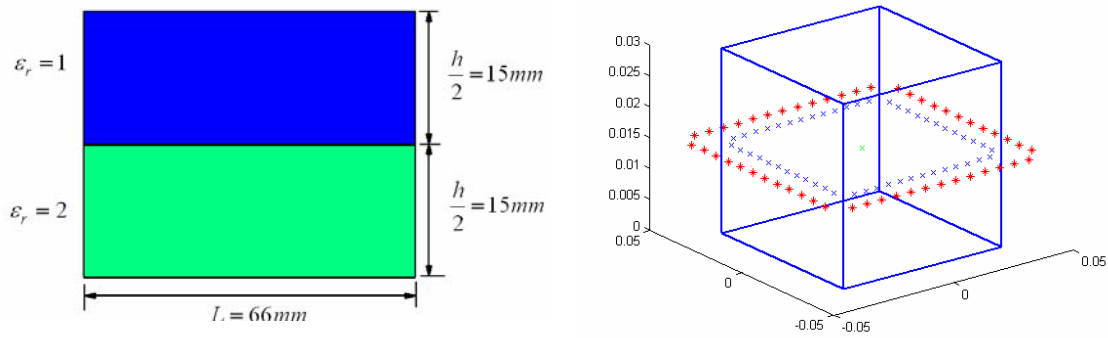


Figura 6.49 Guía cuadrada multicapa y ubicación de 50 imágenes alrededor de la misma.

En primer lugar vamos a realizar un estudio con 50 imágenes (pues para el caso de espacio libre eran más que suficientes) en función de la distancia de las mismas a la guía cuadrada multicapa. Emplearemos para ello una frecuencia de 5Ghz. Los resultados son:

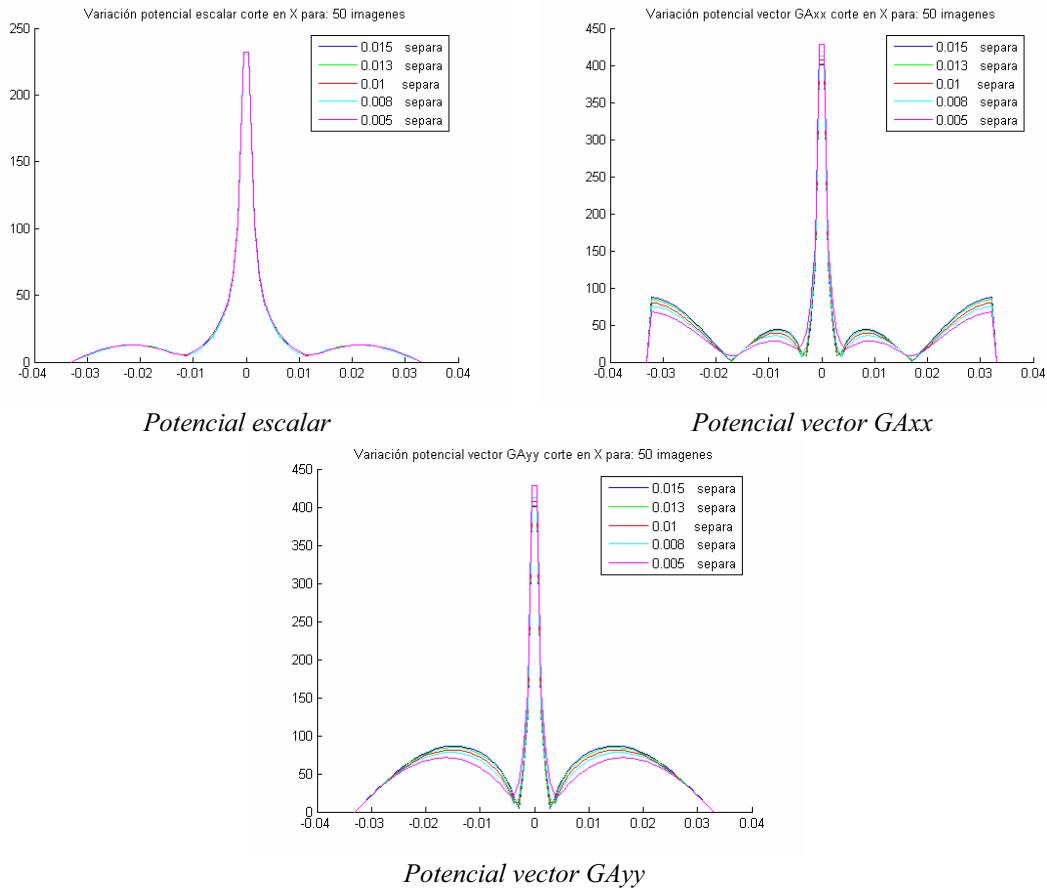


Figura 6.50 Potenciales en el eje 'x' al variar la distancia de 50 imágenes a una guía cuadrada con dos dieléctricos en su interior.

Comprobamos en la figura anterior como una variación de las distancias apenas modifica el resultado, excepto cuando situamos las imágenes excesivamente cerca la guía (5mm), al igual que ocurría en el análisis de la guía cuadrada con un único dieléctrico en su interior.

Para verificar el correcto funcionamiento en este caso, disponemos de un barrido frecuencia de los potenciales vector GA_{xx} y GA_{yy} (que es donde más problemas presenta el método) realizado mediante la técnica analítica descrita en [10], que combina una formulación espacial y espectral de las funciones de Green.

Para este barrido, situaremos la fuente puntual en la posición (15,0,15)mm y el punto de observación en (7,-11,0)mm. Realizaremos un barrido entre 2 y 7 Ghz. Los resultados obtenidos son:

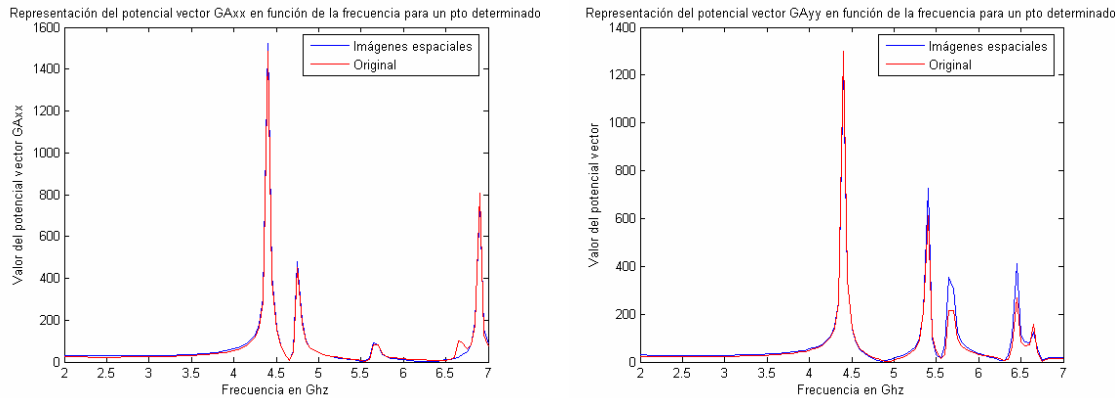
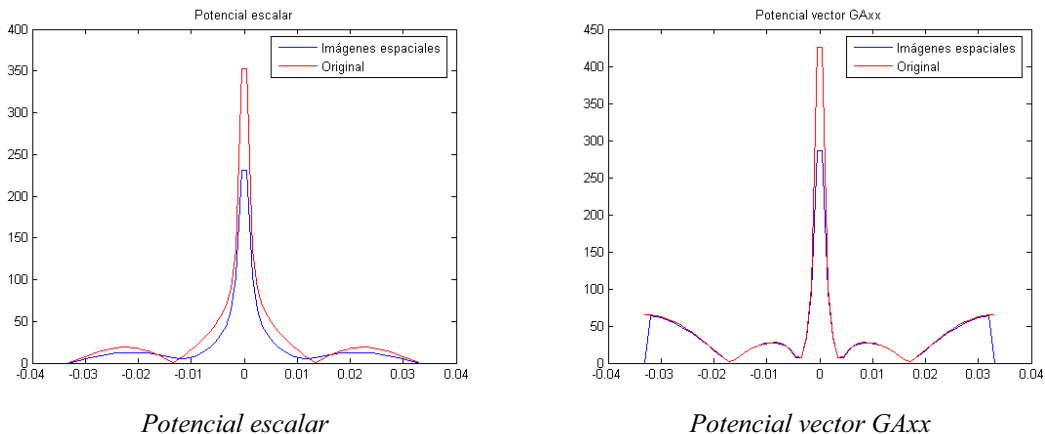
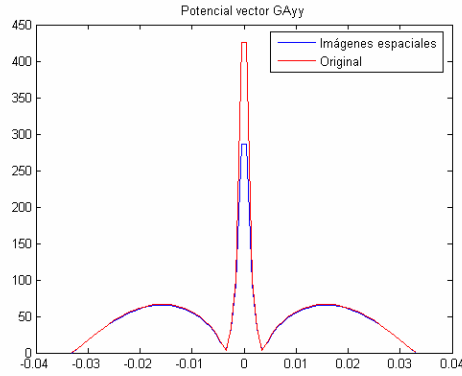


Figura 6.51 Potenciales vector al realizar un barrido en un punto fijo entre 2 y 7 Ghz en una guía cuadrada con 2 dieléctricos. Comparación con el método analítico descrito en [10].

Comprobamos como el potencial vector obtenido se corresponde de forma casi exacta con el método analítico descrito en [10], existiendo pequeñas diferencias puntuales, sin importancia, en el potencial vector GA_{yy} . De esta forma podemos dar por válidos los resultados del potencial vector proporcionados por la teoría de imágenes espaciales al considerar dieléctricos en su interior.

En cuanto al potencial escalar, aparecen un mayor número de problemas en su cálculo, debido a que depende tanto de las componentes TE como TM (como se mostró en 5.2). Así con un único anillo, a pesar de obtener resultados convergentes entre ellos en función de la ubicación y número de imágenes, no conseguimos resultados válidos. En la figura 6.52 mostramos una comparativa del potencial escalar y vector con los resultados obtenido en [3], apareciendo una diferencia notable para el caso del potencial escalar. El análisis se ha realizado a una frecuencia de 6Ghz.





Potencial vector GA_{yy}

Figura 6.52 Comparación de los potenciales en una guía cuadrada de 66x66x30mm con un dieléctrico de 15mm con $\epsilon_r = 2$. Validación con los resultados obtenidos en [10]

Las diferencias aparecidas en el potencial escalar son debidas a la presencia del dieléctrico que hace que las condiciones de contorno impuestas en la cavidad a la altura de la fuente no sean suficientes. Es por tanto necesario reforzar estas condiciones en la zona del dieléctrico, para evitar que la onda de superficie creada en el interior de la guía pueda salir de la misma. Para ello, se propone el empleo de múltiples anillos empleados de forma uniforme en la zona del dieléctrico. Así, se forzará el cumplimiento de las condiciones de contorno, obteniendo resultados válidos.

Para una estructura como la presentada, con una altura eléctrica considerable (30mm, para una frecuencia de 6Ghz hace un total de 0.6λ) serían necesarios una gran cantidad de anillos, siendo el coste computacional muy elevado.

La convergencia aumenta, no obstante, cuando esta altura eléctrica es menor. Si analizamos una cavidad cuadrada con unas dimensiones diferentes, de 120x120mm y una altura total de 24mm (12 mm cada capa) con 8 anillos que rodeen la estructura, obtendremos una convergencia adecuada. Por ejemplo, mostramos las medidas a 5.5Ghz en la figura 6.53.

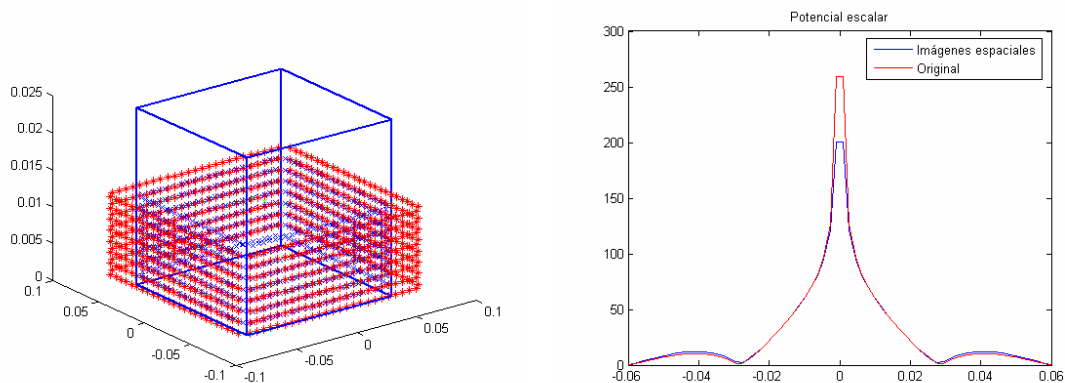


Figura 6.53 Potencial escalar a 5.5Ghz en una guía cuadrada de 120x120mm, con dos capas de 12mm, una de ellas aire y la otra con permitividad de valor 2.

Observamos como los parámetros geométricos de medidas relativas adquieren una gran importancia, aumentando el coste computacional de forma muy importante con la altura eléctrica debido al incremento de anillos a emplear.

Una posible línea de continuación del proyecto sería un estudio entre la cantidad de anillos que envuelven la estructura (y el número de imágenes que emplea cada uno de ellos) en función de la altura eléctrica de la cavidad a analizar.

Como conclusión para el empleo de la técnica de las imágenes espaciales en el caso de estructuras multicapa, con varios dieléctricos, indicar que para el cálculo del potencial escalar se deben emplear varios anillos en las zonas de los dieléctricos para forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno. En función de la longitud eléctrica será necesario el empleo de una mayor cantidad de anillos. Esto no es necesario para las zonas donde la permitividad sea la del aire, es decir 1. En cuanto al potencial vector, su convergencia es más rápida, no necesitando emplear anillos adicionales, obteniendo por tanto un coste computacional mucho más reducido.

De esta forma queda de manifiesto la gran facilidad con la que se extiende el método de las imágenes espaciales a estructuras multicapa, proporcionando potenciales válidos para casi cualquier geometría 2D, tratando de forma adecuada la longitud eléctrica de la misma mediante el empleo de múltiples anillos.

6.10 Software desarrollado

Para este capítulo no se ha desarrollado ningún software, sino que se ha aprovechado el diseñado en el capítulo anterior variando los parámetros de entrada: tipo de estructura, altura, imágenes, frecuencias, número de anillos, etc.

Así, con un único programa, se han logrado estudiar todas las guías presentadas en este capítulo, así como es posible realizar análisis de otras muchas, sin más que definir las de manera adecuada. Es destacable la gran versatilidad del software, siendo capaz de adaptarse a los distintos casos y proporcionar sus resultados de forma automática, tanto en el cálculo de los mismo (en Fortran 90) como en su visualización (Matlab ©).

7. Conclusiones y líneas futuras

7.1 Conclusiones

Este proyecto ha constado de dos partes claramente distinguibles, de las que podemos extraer conclusiones de forma independiente:

En *primer lugar*, se presentó la formulación espacial de la función de Green mediante imágenes espaciales en cavidades cilíndricas. Para ello, se situaron una serie de imágenes alrededor de la estructura bidimensional a analizar, imponiendo las condiciones de contorno en puntos discretos de la misma. Partiendo de esta base, se estableció un “coste” o “medida” de la corrección del cálculo de los potenciales, tanto para el potencial escalar como para el potencial vector.

Posteriormente, se introdujeron distintas técnicas de optimización, con el fin de reducir este “coste” y obtener una implementación de los potenciales en el interior del cilindro más fiable. Entre estas técnicas destacan la de la ubicación de las imágenes espaciales en círculo englobando la estructura y optimizando su radio y la optimización por técnicas de gradiente descendente del valor complejo de las cargas (en el caso del potencial escalar) y de las posiciones de las imágenes.

Se mostraron una gran cantidad de tablas comparativas, en la que se puede observar la efectividad de los distintos métodos, en función de la ubicación de la fuente puntual en el interior de la cavidad. Así, se realizó un análisis exhaustivo de las técnicas, viendo en que situaciones proporcionaban una mejoría más significativa considerando a su vez el coste computacional que acarrea su empleo.

En *segundo lugar*, se extendió la técnica de las imágenes espaciales para el cálculo de la función de Green y los distintos potenciales a geometrías arbitrarias. Tras mostrar la formulación, se presentó un software capaz de analizar automáticamente cualquier tipo de geometría, calculando los potenciales en su interior. Posteriormente, se introdujo el concepto de “coste” para tener una medida de la corrección de los cálculos, aplicándose nuevamente las distintas técnicas de optimización mostradas.

El siguiente paso fue la ampliación de la técnica de las imágenes espaciales a estructuras tridimensionales, introduciendo para ello la transformada de Sommerfeld [9]. Así, se diseñó un software capaz de analizar casi cualquier geometría, pudiendo definir la misma en altura como un medio estratificado. Además, se introdujo el concepto de multianillo, para evaluar cavidades con una altura eléctricamente grande. Este concepto consiste en ubicar varios anillos de imágenes a distintas alturas de la cavidad, englobándola por completo. Todos los cálculos de potenciales fueron validados para una guía cuadrada con los resultados analíticos de [10].

Además, se observó la necesidad de emplear una mayor cantidad de anillos en las zonas donde se encontraba el dieléctrico, para poder contener la onda de superficie creada y poder obtener de forma correcta el potencial escalar.

Otra aplicación que se mostró fue el cálculo de las frecuencias de resonancia de las distintas cavidades, realizando un barrido en frecuencia sobre un punto fijo en el interior de la guía sobre el que se calculan los potenciales. De esta forma aparecen las resonancias naturales de la cavidad, que coinciden con las frecuencias de corte de los distintos modos.

Finalmente, se mostraron los resultados del cálculo de los potenciales para una gran cantidad de guías con distintas geometrías: rectangular, rombo, triangular, flange, etc. Se consiguió validar el método empleando el software comercial HFSS©, obteniéndose una convergencia casi total de las frecuencias de corte obtenidas y una visualización del potencial escalar, cuya distribución debe de coincidir con el campo eléctrico E_z .

En cuanto a los problemas que presenta el método, éstos aparecen al analizar guías con entrantes (especialmente cuando aparecen más de uno) y se manifiestan como una falta de convergencia entre las distintas posiciones de las imágenes y con el número de éstas. Así, aunque se logran resultados parciales válidos (comparándolo con HFSS©) se necesita una mejora del método para obtener una convergencia total.

También comentar el aumento del coste computacional que requiere el análisis del potencial escalar en guías con distintas capas de dieléctricos, pues es necesario introducir un mayor número de anillos.

En este punto cabe destacar la robustez del software: definiendo una estructura arbitraria en un fichero de texto, es capaz de realizar de forma automática todo el estudio de los potenciales en su interior, teniendo en cuenta su altura (estratificada si es necesario), vértices etc.

Por último comentar que el empleo de la técnica presentada para tramos de geometría arbitraria va a permitir el empleo de la ecuación integral en una gran cantidad de estructuras en las que hasta ahora no podía ser utilizada debido al problema del cálculo de la función de Green. Por primera vez, se ha obtenido un método que, de forma casi general, resuelve los potenciales en el interior de cualquier guía, teniendo un empleo directo en multitud de casos prácticos: estudio y análisis de filtros, antenas, resonadores, circuitos de radiofrecuencia en guía-onda, etc.

7.2 Líneas futuras

Debido a la amplitud del proyecto, han surgido durante la elaboración del mismo una gran cantidad de líneas de trabajo con las que se puede seguir el mismo.

De la primera parte del proyecto, dedicada a la optimización de la función de Green, podemos destacar:

- Empleo de distintos tipos de integración a la hora de hacer un “test de pulsos” para optimizar los potenciales, ya que los empleados no han mostrado un resultados satisfactorios. Además, se pueden plantear test diferentes, empleando triángulos por ejemplos. El objetivo será buscar un valor promediado nulo a la hora de imponer la condición de contorno en vez de un punto discreto.
- Utilización de algoritmos genéticos [21] para ubicar las imágenes alrededor de la cavidad a analizar. Aunque puede proporcionar resultados muy satisfactorios, tiene la desventaja de un enorme coste computacional.

- Optimización por descenso de gradiente del valor complejo y posiciones de las imágenes en el caso del potencial vector, pues sólo está formulado para el potencial escalar.

En cuanto a la segunda parte del proyecto, con la extensión de la teoría de las imágenes espaciales a geometrías arbitrarias, posibles líneas de investigación futuras son:

- Definición de un “coste” a la hora de analizar cavidades tridimensionales, para poder tener una medida de la corrección de los potenciales implementados. Ello nos dará una información muy valiosa a la hora de ubicar las imágenes alrededor de las distintas estructuras.
- Recomposición de los campos eléctrico y magnético en el interior de las cavidades, partiendo de los potenciales calculados con las imágenes espaciales.
- Empleo de imágenes situadas en ubicaciones complejas [16, 17, 18]. Esta técnica promete resultados muy satisfactorios, y consiste en considerar las posiciones de las imágenes complejas, apareciendo entonces una “directividad” de cada imagen espacial. Orientado de forma adecuada la directividad de cada imagen, podremos lograr imponer las condiciones de contorno en ciertas zonas de la cavidad a analizar, sin influir de forma negativa en el resto.
- Estudio del número de anillos a introducir en medios con distintas capas de dieléctricos en función de la altura eléctrica, para contener el coste computacional.
- Realización de algún caso práctico mediante la ecuación integral para el análisis de circuitos de radiofrecuencia en el interior de guía-onda estratificadas, empleando para el cálculo de las imágenes espaciales la técnica aquí presentada.

Por último, comentar que todos los desarrollos presentados a lo largo del proyecto se han basado en la suposición de fuentes eléctricas; una continuación directa del proyecto será realizar la formulación basándose en fuentes magnéticas (que no es dual, pues aunque cambia el tipo de fuente no cambia el tipo de contorno, por lo que la condición a cumplir varía). No obstante, su obtención debe de ser inmediata, dada su gran similitud con los desarrollos mostrados.

ANEXO I

Resultados numéricos de la integración por pulsos en la evaluación del potencial escalar en un cilindro infinitesimal

Presentaremos en este anexo los resultados numéricos correspondientes a la integración por pulsos en la evaluación del potencial escalar en un cilindro infinitesimal.

Para ello, mostraremos a continuación, cual es el valor final del coste (definido en la ecuación 3.3) obtenido en estos métodos en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25, 30) y de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$. Mostraremos en rojo aquellos resultados que mejoren respecto a la ubicación inicial de cargas imágenes; también indicaremos el valor del radio óptimo que hemos obtenido en cada uno de los casos.

- *a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:*

Tipo Técnica \ N° Cargas	5	10	15	20	25
Point-matching	10.1294	1.3525	0.0061	7.1487e-005	1.3369e-006
Trapecio	10.1294	74.5772	0.0061	0.1318	1.3369e-006
Simpson	30.3169	47.4165	0.0041	3.5133	9.1169e-007
Simpson 3/8	35.1437	31.8513	0.0039	1.1527	8.4151e-007
Bode	25.4819	28.0553	0.0039	0.5095	8.7649e-007
Semi-abierta 4 puntos internos	25.9997	0.8972	0.0039	4.5510e-005	8.7649e-007
Semi-abierta 10 puntos internos	26.0353	0.8972	0.0039	4.5522e-005	8.7649e-007
Trapecio generalizado	26.6402	0.8973	3.8555e-003	4.54981e-005	8.6352e-007

Tabla AI.1 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$

- *b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	12.1475	16.5825	0.0972	5.6664e-004	5.9574e-006	4.0841e-008
Trapecio	12.1475	18.3701	0.0972	1.5026	5.9574e-006	0.0112
Simpson	17.8651	1.9408e+005	0.0938	2.3079e+009	4.7875e-006	416.8706
Simpson 3/8	26.9861	2.7496e+005	0.0920	1.8730e+009	4.6727e-006	1.7996e+003
Bode	40.2739	3.6733e+005	0.0907	1.1266e+009	4.6372e-006	671.2963
Semi-abierta 4 puntos internos	40.6732	5.5586	0.0912	5.3603e-004	4.6498e-006	7.5398e-009
Semi-abierta 10 puntos internos	33.8777	42.1664	0.0908	0.0016	4.6314e-006	1.2779e-007
Trapecio generalizado	33.1510	65.0231	9.0850e-002	2.1552e-003	4.6282e-006	2.6125e-007

Tabla AI.2 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$

- *c) Posición $(0.4\lambda, 0\lambda)$:*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	16.1649	19.9669	0.3775	0.0026	2.5848e-005	4.6492e-007
Trapecio	16.1649	21.7083	0.3775	0.8872	2.5848e-005	0.0088
Simpson	21.3260	18.0569	0.4148	0.7403	2.3114e-005	0.0094
Simpson 3/8	26.2434	13.2931	0.4059	0.6847	2.2760e-005	0.0140
Bode	37.0349	12.3691	0.3993	0.7613	2.2615e-005	0.0049
Semi-abierta 4 puntos internos	37.9058	6.6327	0.4029	0.0024	2.2746e-005	5.2649e-007
Semi-abierta 10 puntos internos	33.4921	6.6674	0.3996	0.0024	2.2608e-005	5.1975e-007

ANEXO I: Resultados numéricos de la integración por pulsos

Trapezio generalizado	32.7845	6.5832	0.3999	2.3510e-003	2.2612e-005	5.2692e-007
-----------------------	---------	--------	--------	-------------	-------------	-------------

Tabla AI.3 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.4 λ , 0.0 λ)

- *c) Posición (0.4 λ , 0.4 λ):*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	26.6829	23.6945	1.4449	0.0132	2.8172e-004	2.5517e-005
Trapezio	26.6829	68.8166	1.4449	0.3749	2.8172e-004	0.0172
Simpson	17.1538	3.3688e+003	1.9235	1.7612e+011	3.6452e-004	81.7399
Simpson 3/8	19.7604	4.6252e+003	1.8716	2.3064e+012	3.5823e-004	69.2776
Bode	21.8704	5.5227e+003	1.8319	4.4826e+011	3.5422e-004	63.6620
Semi-abierta 4 puntos internos	21.1368	81.5308	1.8271	0.2039	3.4845e-004	7.5339e-004
Semi-abierta 10 puntos internos	20.4663	685.1304	1.8306	1.6533	3.5342e-004	0.0061
Trapezio generalizado	20.3296	1285.018	1.8339	2.2861	3.5392e-004	7.335e-003

Tabla AI.4 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.4 λ , 0.4 λ)

- *d) Posición (0.5 λ , 0 λ):*

Nº cargas Tipo Técnica	5	10	15	20	25	30
Point-matching	17.9904	19.9656	0.9056	0.0070	9.6659e-005	3.7540e-006
Trapezio	17.9904	32.0972	0.9056	0.7542	9.6659e-005	0.0121
Simpson	23.9292	13.5542	1.1268	0.5670	1.2030e-004	0.0200
Simpson 3/8	25.1236	14.2283	1.0987	0.4035	1.1790e-004	0.0038
Bode	27.9842	14.4025	1.0774	0.8057	1.1630e-004	0.0129

ANEXO I: Resultados numéricos de la integración por pulsos

Semi-abierta 4 puntos internos	28.9088	12.7546	1.0889	0.0101	1.1726e-004	8.4674e-006
Semi-abierta 10 puntos internos	27.5673	12.7675	1.0782	0.0098	1.1636e-004	8.1904e-006
Trapezio generalizado	27.2404	12.5845	1.07945	8.9901e-003	1.16444e-004	7.61462e-006

Tabla AI.5 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.5 λ , 0.0 λ)

- *e) Posición (0.7 λ , 0.7 λ):*

Nº cargas Tipo Integración	5	10	15	20	25	30
Point-matching	22.8267	8.0995	1.6061	4.2177	0.4510	1.1371
Trapezio	22.8267	51.6313	1.6061	5.9493	0.4510	5.1767
Simpson	21.7667	6.0057	3.0976	1.7441e+013	0.8455	2.1369
Simpson 3/8	36.9026	6.7298	2.9544	3.6043e+012	0.8493	1.3641
Bode	26.3056	36.9438	2.4971	7.7497e+012	0.7794	0.8441
Semi-abierta 4 puntos internos	42.9424	6.0783	2.1737	7.1962	0.7504	0.7286
Semi-abierta 10 puntos internos	41.5098	10.0066	1.8135	356.1569	0.7050	0.7609
Trapezio generalizado	34.4937	10.7793	1.5838	855.8030	0.6978	0.7804

Tabla AI.6 Coste de distintos métodos de integración por pulso, en función del número de imágenes, posición fuente en (0.7 λ , 0.7 λ)

ANEXO II

Resultados numéricos del método de ubicación de cargas en picos de potencial escalar en un cilindro infinitesimal

Presentaremos en este anexo los resultados numéricos correspondientes al método de ubicación de cargas en picos de potencial escalar en un cilindro infinitesimal.

Para ello mostraremos cual es el valor final del coste (definido en la ecuación 3.3) obtenido en función del número de cargas imagen empleadas (5, 10, 15, 20, 25) y de la situación inicial de partida (a partir de la cual irá evolucionando el método), así como de la posición de la fuente en el interior del cilindro $[(0\lambda, 0\lambda), (0.2\lambda, 0.2\lambda), (0.4\lambda, 0\lambda), (0.4\lambda, 0.4\lambda), (0.5\lambda, 0\lambda), (0.7\lambda, 0.7\lambda)]$.

- a) Posición $(0\lambda, 0\lambda)$:*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	1.3525				1.3525
11	1.6572				
12	2.1028				
13	1.8989	0.0511			
14	1.8612	0.0608			
15	1.7483	0.0854			0.0061
16	1.6920	0.1085	0.0023		
17	1.0395	0.1051	0.0026		
18	1.1698	0.1218	0.0040		
19	0.9201	0.1099	0.0055	1.6360e-004	
20	0.0297	0.1236	0.0068	1.7785e-004	7.1487e-005
21	0.0218	0.1034	0.0075	2.9472e-004	
22	0.0057	0.0589	0.0073	4.4016e-004	
23	0.0028	0.0641	0.0082	5.8612e-004	
24	0.0016	0.0422	0.0064	6.0961e-004	
25	0.0012	0.0372	0.0084	5.4078e-004	1.3369e-006

Tabla AII.1 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en $(0.0\lambda, 0.0\lambda)$

- b) Posición $(0.2\lambda, 0.2\lambda)$:*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	16.5825				16.5825
11	15.7068				
12	14.2819				
13	8.6094	0.6356			

14	6.4884	1.2442			
15	4.9207	1.1727			0.0972
16	3.7564	0.8740	0.0359		
17	2.6878	0.7288	0.0862		
18	2.6345	0.6295	0.0917		
19	1.0413	0.2856	0.0770	0.0015	
20	0.1475	0.2405	0.0831	0.0038	5.6664e-004
21	0.1066	0.3402	0.0733	0.0080	
22	0.0402	0.1910	0.0462	0.0081	
23	0.0237	0.1302	0.0428	0.0073	
24	0.0142	0.0967	0.0300	0.0053	
25	0.0119	0.0591	0.0259	0.0056	5.9574e-006

Tabla AII.2 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.2λ, 0.2λ)

- *c) Posición (0.4λ, 0λ):*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	19.9669				19.9669
11	65.9692				
12	18.8774				
13	23.4665	2.2782			
14	20.1365	4.0115			
15	15.2306	4.7308			0.3775
16	9.9794	3.7666	0.1451		
17	5.4473	2.1512	0.3936		
18	1.3072	2.6359	0.3760		
19	1.2457	0.1562	0.3007	0.0070	
20	0.1046	0.1157	0.3258	0.0240	0.0026
21	0.0902	0.1417	0.3652	0.0388	
22	0.0658	0.1139	0.2187	0.0275	
23	0.0646	0.1519	0.2039	0.0252	
24	0.0527	0.0903	0.1567	0.0217	
25	0.0298	0.0558	0.1413	0.0223	2.5848e-005

Tabla AII.3 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.4λ, 0.0λ)

- *c) Posición (0.4λ, 0.4λ):*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	23.6945				23.6945
11	45.8292				
12	25.2670				
13	57.1417	7.4169			

14	33.7669	11.8571			
15	18.2913	9.5892			1.4449
16	17.0453	6.4370	0.5339		
17	10.0158	5.3626	1.4715		
18	6.2894	6.6233	1.2682		
19	2.1613	5.9441	1.0167	0.0348	
20	0.1773	5.5390	1.1615	0.1500	0.0132
21	0.1042	5.5099	0.8259	0.1389	
22	0.1352	6.2922	0.9196	0.1125	
23	0.0798	3.7750	0.7934	0.1062	
24	0.1049	4.3934	0.7925	0.1053	
25	0.0692	3.3206	0.6214	0.0900	2.8172e-004

Tabla AII.4 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.4λ, 0.4λ)

- *d) Posición (0.5λ, 0λ):*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	19.9656				19.9656
11	57.2933				
12	32.7523				
13	33.6047	4.9316			
14	29.7060	7.0980			
15	17.9323	10.0183			0.9056
16	15.2451	7.3640	0.3433		
17	8.8521	5.9478	0.9930		
18	1.9220	6.3889	0.9187		
19	1.6752	5.5211	0.7243	0.0198	
20	0.2042	4.6134	0.6904	0.0771	0.0070
21	0.2165	3.2983	0.6091	0.1346	
22	0.1601	0.7416	0.6828	0.0928	
23	0.1557	0.2032	0.6144	0.1074	
24	0.1179	0.1254	0.4256	0.0720	
25	0.1092	0.1289	0.3180	0.0660	9.6659e-005

Tabla AII.5 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en (0.5λ, 0.0λ)

- *e) Posición (0.7λ, 0.7λ):*

Nº de cargas imágenes	Situación inicial: 10 cargas	Situación inicial: 13 cargas	Situación inicial: 16 cargas	Situación inicial: 19 cargas	Point-Matching
10	8.0995				8.0995
11	1.2031				
12	1.1820				

13	1.1217	11.2623			
14	1.1220	2.2962			
15	1.1530	2.0504			1.6061
16	1.0949	2.1947	0.8639		
17	0.9710	2.0100	0.6412		
18	1.0705	1.9359	0.6069		
19	1.8399	1.9205	0.6187	3.7204	
20	0.9958	1.8298	0.5594	0.1986	4.2177
21	1.7867	1.8400	0.5878	0.2029	
22	1.5244	1.7896	0.4508	0.2289	
23	1.5881	1.7708	0.4382	0.1698	
24	1.9221	1.7239	0.3882	0.1303	
25	0.6174	1.3796	0.3731	0.1441	0.4510

Tabla AII.6 Coste de la ubicación de cargas en picos de potencial, con distintas situaciones iniciales, en función del número de imágenes y con posición fuente en $(0.7\lambda, 0.7\lambda)$

Bibliografía

- [1] O. I. Sukharevsky and S. V. Kukobko and A. Z. Sazonov, "Volume Integral Equation Analysis of a two-dimensional radome with a sharp nose", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 53, No. 4, pp. 1500-1506, April 2005.
- [2] K.A. Michalski and J.R. Mosig, "Multilayered media Green's functions in integral equation formulations", IEEE Trans. Antennas Propag., vol 45, no. 3, pp. 508-519, Mar. 1997.
- [3] Yi-Chi Shih, "Design of Waveguide E-Plane Filters with all Metal Inserts", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques", Vol. 32, No. 7, pp. 695-704, July 1984.
- [4] Alejandro Alvarez Melcon and Juan R. Mosig, "Two Techniques for the Efficient Numerical Calculation of the Green's Functions for Planar Shielded Circuits and Antennas", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 48, No. 9, pp. 1492-1504, September 2000.
- [5] Jind-Yeh Lee and Tzyy-Sheng Horng and Nicolaos G. Alexopoulos, "Analysis of Cavity-Backed Aperture Antennas With a Dielectric Overlay", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 42, No. 11, pp. 1556-1562, November 1994.
- [6] F. Quesada Pereira, P. Vera Castejón, D. Cañete Rebenaque, J. Pascual García, A. Alvarez Melcón, "Numerical Evaluation of the Greens's Functions for Cylindrical Enclosures by a New Spatial Images Method", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 53, No. 1, January 2005, pp. 94-105.
- [7] P. Vera-Castejon, F. D. Quesada-Pereira, J. L. Gomez-Tornero, and A. Alvarez-Melcon,. A new procedure for the evaluation of electromagnetics potentials inside circular cavities, in Progress in Electromagnetics Research Symposium Digest, (Pisa, Italy), PIERS, 28-31 March 2004.
- [8] Balanis, C.A. (1989). "Advanced Engineering Electromagnetics". John Wiley and Sons.
- [9] J.R. Mosig. Integral Equation Technique. New York: Wiley, 1989
- [10] Alejandro Álvarez Melcon, "Applications of the integral equation technique to the analysis and synthesis of multilayered printed shielded microwave circuits and cavity backed antennas" Thèse EPFL, no 1901 (1998), Département d'électricité. Dir.: Juan Mosig.
- [11] Roger F. Harrington "Field Computation by Moment Methods", 1968.
- [12] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery, "Numerical Recipes in Fortran 90", Second Edition, 1999, Cambridge University Press.
- [13] J.G. de Jalón, J.I. Rodríguez, A. Brazales "Aprenda Matlab 6.1 como si estuviera en primero"

- [14] S.-G. Pan and I. Wolff, "Scalarization of dyadic spectral Green's function and network formalism for the three-dimensional full-wave analysis of planar lines and antennas", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech*, vol. 42, no. 11, pp 2128-2127, Nov. 1994.
- [15] A. A. Melcón, J.R. Mosig, and M. Guglielmi, "Efficient CAD of boxed microwave circuits based on arbitrary rectangular elements", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol 47, no. 7, pp. 1045-1058. Jul. 1999.
- [16] E. Heyman, B.Z. Steinberg and R. Lancunescu "Electromagnetic Complex Source Pulsed Beam Fields", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol 38, no.7, pp. 957-963, Jul. 1990.
- [17] T. Oguzer, A. Altintas and A.I.Nosich. "Accurate simulation of reflector antennas by the Complex source-dual series approach", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol 43, no.8, pp. 793-801, August. 1995.
- [18] A.I.Nosich, V.B. Yurchenko and A.Altintas "Numerically exact analysis of a two-dimensional variable-resistivity reflector fed by a complex point source", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol 45, no.11, pp. 1592-1601, November. 1997.
- [19] W.Geyi "Numerical solution of transmission line problems by a network model decomposition method based on polygon discretization", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 38, no. 8, pp. 1086-1091. August. 1990.
- [20] Yi Huang "Conducting triangular chambers for EMC measurements", *Meas. Sci. Technol.* 10 (1999). L21-L24.
- [21] David E. Goldberg "Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning". ISBN: 0-201-15767-5
- [22] Arun K. Bhattacharyya "Electromagnetic Fields in Multilayered Structures. Theory and Applications". ISBN: 0-89006-651-5
- [23] S. V. Marshall, R. E. DuBroff, G. G. Skitek, "Electromagnetismo, conceptos y aplicaciones", Simon&Schuster, Méjico, 1997. ISBN 968-880-954-3.
- [24] Ángel Cardama, Lluís Jofre Roca "Antenas" Edicions UPC. ISBN: 84-8301-625-7
- [25] F. Pérez Soler "Investigación de Algoritmos Rápidos para el estudio de Estructuras Eléctricamente Grandes". PFC UPCT. Directores: Alejandro Álvarez Melcón y Fernando D. Quesada Pereira.
- [26] A. Jurado Moreno " Análisis y Diseño de Dispositivos de Microondas para Comunicaciones Espaciales mediante Tecnología de Resonadores Dieléctricos". PFC UPCT. Directores: Fernando D. Quesada Pereira y David Cañete Rebenaque.
- [27] R. Navarro Carrasco "Análisis de modos en líneas de transmisión mediante el método de los elementos finitos". PFC UPCT. Director: Alejandro Díaz Morcillo.

BIBLIOGRAFÍA

[28] http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

[29] www.upv.es/antenas/Tema_2/Ecuaciones_Maxwell.htm